

אולימפיאדת בנו ארבל

כיתות ח'

1. גיא זרק קוביית משחק. אחריו יאיר זרק אותה קוביה. מה הסתברות, שהמספר של יאיר יהיה גדול מהמספר של גיא?

פתרון: $\frac{5}{12}$

2. פתרו במספרים טבעיים:

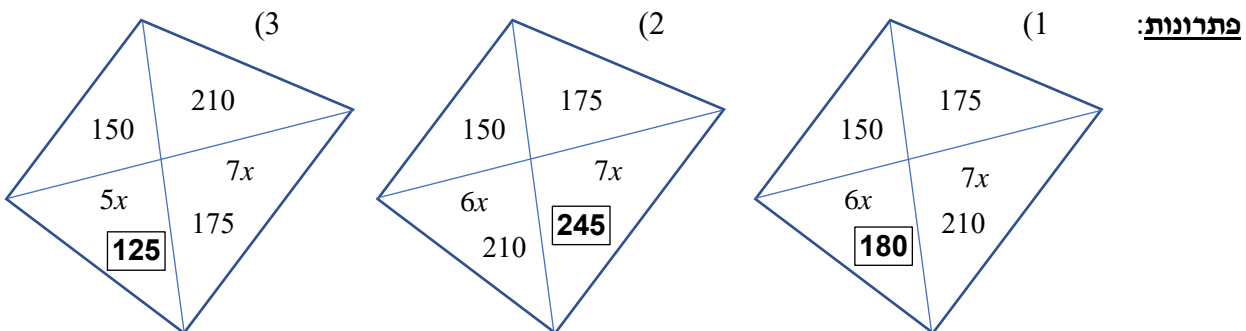
$$x^2 - y^2 = 2021$$

פתרון: $1 \cdot 2021 = 2021 = 43 \cdot 47$

אז $(45, 2)$

$(1011, 1010)$

3. חילקו את עוגה אחידה מרובעת לפי חיתוך באלכסונים. משקלם של 3 חתיכות הוא: 150 גר', 175 גר' ו-210 גר'. מה האפשרויות של משקל של החתיכה הרביעית?



4. בשעה מסויימת הונדה וטויוטה היו במרחק 200 ק"מ זו מזו בכביש ישר והתחילו לנוע זו לקראת זו במהירות קבועה. אחר שעתיים וחצי הם שוב היו במרחק 200 ק"מ זו מזו. גיא טען, כי סכום המרחקים שעברה הונדה לפני פגישתם וטויוטה אחרי פגישתם שווה ל-185 ק"מ. האם יכול להיות, שגיא צדק?

פתרון: הם נפגשו תוך שעה ורבע.

$$\text{סכום המהירויות שלהן} = 400 : 2\frac{1}{2} = 160$$

אז בשעה ורבע הן עוברות ביחד 200 ק"מ, למרות שהונדה לפני הפגישה וטויוטה אחרי

נסעו $1\frac{1}{4}$ שעות כ"א.

תשובה: גיא לא צודק.

5. קבוצת משקולות מקיימת שני תנאים:

- (1) היא מכילה 5 משקולות, שהן שונות במשקל בזוגות.
- (2) לכל זוג משקולות קיים זוג נוסף, שמשקלו הכולל שווה למשקלו הכולל של זוג ראשון.
מהו המספר המינימאלי של משקולות בקבוצה?

פתרון: לזוג משקולות הקלות ביותר שונות חייב להיות עוד זוג כאלה.

אז אם A הקלה ביותר, חייבות להיות 4 כאלה. אותו הדבר מצד המשקולות הכבדות. וחייבות להיות משקולות ביניים בין קלות וכבדות.

$$\text{סה"כ: } 13 = 1 + (4 + 2) \cdot 2$$

דוגמא: $\{1,1,1,1,2,2,3,4,4,5,5,5,5\}$

תשובה: 13

6. במרובע $ABCD$ נתון:

$$AD = BC, \angle B = 115^\circ, \angle A = 85^\circ.$$

אנכים אמצעיים לצלעות AB ו- CD נחתכים בנקודה M .

מצאו את גודל הזווית MAB .

פתרון: $MC = MD, MA = MB$ - התכונה של אנך אמצעי (משולשים שווי-שוקיים).

אז $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (צ.צ.צ.)

וגם $\angle MAD = \angle MBC$ (1)

נסמן $\angle MAB = \angle MBA = \alpha$

$90^\circ < \alpha$ - זווית בסיס במשולש שווי-שוקיים.

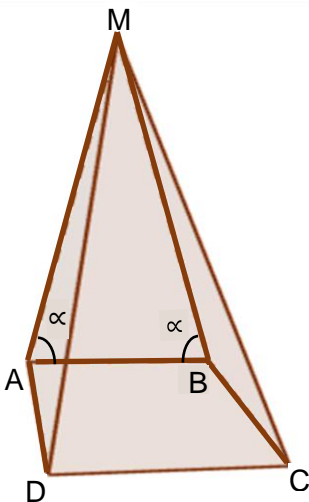
לפי הנתון: $\angle MAD = \alpha + 85^\circ$

לפי (1) $\angle MBC \neq \alpha + 115^\circ$

$$\text{אז } \angle MBC = 360^\circ - \alpha - 115^\circ = 245^\circ - \alpha$$

שוב לפי (1) מקבלים

תשובה: $\alpha = 80^\circ$.



נשאר לפסול מקרה, שהנקודות D, C, M הן כולן מצד אחד של הישר AB .

אילו זה היה אפשרי, אז $\angle MBC = 115^\circ - \alpha$ ו- $\angle MAD = |\alpha - 85|$

אבל השוויון $85 - \alpha = 115 - \alpha$ בלתי אפשרי.

ובמקרה, ש- $\alpha - 85 = 115 - \alpha$ יוצא,

כי $\alpha = 100^\circ$ - סתירה עם העובדה, ש- α היא זווית חדה.

7. נתון, כי לכל x, y ממשיים

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

הוכיחו, כי למספר $f(2021)$ יש מספר ריבועי ואי-זוגי של מחלקים טבעיים.

פתרון: נציב $x = y = 0$, נקבל $f(0) = 0$.

נציב $x = y$,

$$f(0) = 2f(x) - 2x^2 \rightarrow f(x) = x^2$$

למספר ריבועי יש מספר אי-זוגי של מחלקים.

$$2021^2 = 43^2 \cdot 47^2$$

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9 = 3^2$$

8. מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים (x, y) , כך ש- $x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 3$.

$$xy(x + y) - ((x + y)^2 - 2xy) = 3 \quad \text{פתרון:}$$

$$xy = v \quad x + y = t \quad \text{נסמן}$$

$$tv - t^2 + 2v = 3$$

$$v = \frac{t^2 + 3}{t + 2} = t - 2 + \frac{7}{t + 2}$$

$$t + 2 = \pm 1, \pm 7 \quad \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{שלם} \end{matrix}$$

$$(x, y) \in \{(1, 4), (4, 1)\} \quad \text{אחרי בדיקה מקבלים}$$