

22.12.2013

י"ט בטבת תשע"ג

**אולימפיאדה ראשונה ע"ש בנו ארבל ז"ל
כיתות ח'**

**יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה.
תשובה נכונה ללא הוכחה לא תתקבל.
אין להשתמש במחשבון.**

1. חיים סיפר לחברו משה: "אין לי בנות, ולכל אחד מהבנים שלי מספר בנים השווה למספר הבנים שלי. מספר הנכדים שלי גדול מ-50, אך קטן מ-80". כמה בנים יש לחיים?

2. פתרו את המשוואה $\{x\} - 1 = [x^3] + [x^2] + [x]$.
הערה: $[x]$ הוא החלק השלם של x , כלומר המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ- x . $\{x\}$ הוא החלק השברי של x , כלומר $x - [x]$.

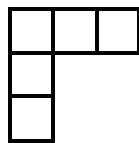
3. מתוך 2013 מטבעות זהים למראָה יש 100 מטבעות מזויפים. כל המטבעות המזויפים שווים במשקלם, וכך גם כל המטבעות האמיתיים. ידוע שמשקל מטבע מזויף שונה ב-1 ממשקל מטבע אמיתי. נתונים מאזני כפות עם מחוג, שבשקילה מראים את ההפרש בין משקלי הכפות. בוחרים מטבע. האם אפשר באמצעות שקילה אחת לבדוק אם המטבע אמיתי?

4. כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2013}$?

5. כמה צלעות יכולות להיות למצולע קמור, אם כל אלכסונו שווים באורכם? (מצולע קמור – זהו מצולע, שכל אלכסונו נמצאים בתוכו).

6. a, b, c מספרים טבעיים. הוכיחו כי אחד המספרים $a^5b - b^5a$, $a^5c - c^5a$, $b^5c - c^5b$

מתחלק ב-16.



7. פינה מורכבת מחמש משבצות, כמו בצירור. מהי הכמות המרבית של פינות שאפשר לחתוך מתוך לוח משבצות 6×9 ? מותר לסובב את הפינה.

בהצלחה!