

14.12.2014

כ"ב בכסלו תשע"ה

אולימפיאדה שנייה ע"ש בנו ארבל ז"ל כיתות ט'

יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה.
תשובה נכונה ללא הוכחה לא תתקבל.
אין להשתמש במחשבון.

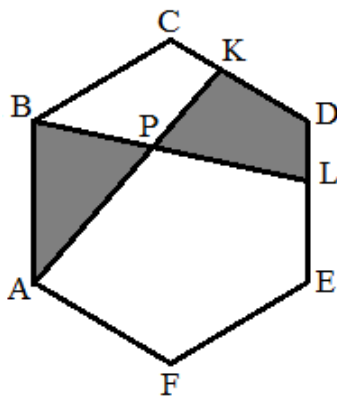
1. על כביש מעגלי ממוקמות 4 תחנות דלק A, B, C, D. המרחק (לאורך הכביש) AB שווה ל-50 ק"מ, המרחק AC - 40 ק"מ, המרחק CD - 25 ק"מ, המרחק AD - 35 ק"מ. מהו המרחק BC?

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $1 + \frac{3}{3-x} \left(1 + \frac{2}{2-x} \left(1 + \frac{1}{1-x} \right) \right) + x = 0$

3. האם קיים a עבורו המספרים $a + \sqrt{15}$, $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$, שניהם שלמים?

4. המספרים 1, 2, ..., 10 מסודרים במעגל. כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק.
א. הוכיחו כי קיימים במעגל שלושה מספרים עוקבים שסכומם לפחות 18.
ב. בנו דוגמה בה אף סכום של שלושה מספרים עוקבים במעגל אינו גדול מ-18.

5. נתון שולחן ביליארד מלבני, עם כיסים רק בפינותיו. מאחת הפינות שולחים כדור ביליארד נקודתי. לאחר מספר התנגשויות, הכדור נופל לכיס פינתי כלשהו. ההתנגשויות עם הקירות מתרחשות על פי החוק שזווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה. האם ייתכן שהכדור נפל לכיס ממנו התחיל?



6. נתונים שלושה מספרים a, b, c המקיימים $0 \leq a, b, c \leq 1$,
 $a + b + c = \frac{3}{2}$. הוכיחו כי $ab + ac + bc \geq \frac{1}{2}$.

7. במשושה משוכלל ABCDEF על הצלע CD נמצאת נקודה K, ועל הצלע DE נקודה L. הקטעים AK, BL נפגשים בנקודה P. נתון כי המרובע KPLD והמשולש PAB שווים בשטחם. מצאו את הזווית APB.

בהצלחה!