מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

כ"ב בכסלו תשע"ה 14.12.2014

אולימפיאדה שנייה ע"ש בנו ארבל ז"ל – פתרונות
כיתות ז'

1. שלושה קיפודים מצאו שלושה גושי גבינה בעלי משקלים 4, 10 ו-13 גרם. הם התקשו לחלק אותם בצורה הוגנת, ופנו לשועל לעזרה. השועל יכול לבצע כמות כלשהי של פעולות מהסוג הבא: לבחור שני גושים, לפרוס מכל אחד גרם אחד של גבינה, ולאכול את הפרוסות. האם השועל יכול להשאיר לקיפודים גושים שווי משקל?

תשובה. כן.

פתרון. למשל, בשלב הראשון השועל יאכל 3 פעמים מהגוש הקטן ביותר והגדול ביותר. המצב אחרי זה יהיה: 1, 10, 10 גרם. אז השועל יאכל 9 פעמים משני הגושים הגדולים ויביא את הגושים למצב: 1, 1, 1.

2. בגן חיות יש יותר אריות מאשר צבאים, יותר דובים מאשר אריות ויותר ג'יראפות מאשר דובים, אבל יותר קרניים של צבאים מאשר צווארים של ג'יראפות. מהי הכמות הקטנה ביותר האפשרית של חיות בגן חיות זה?

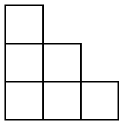
תשובה. 22 חיות.

פתרון. אי השוויון על הכמויות:

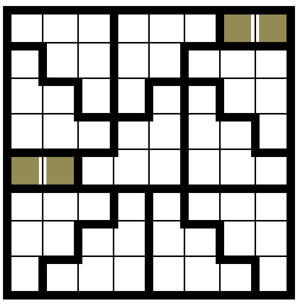
צבאים < אריות < דובים < ג'יראפות < פעמיים צבאים.

לכן בין הכמות של הצבאים לבין פעמיים כמות זו יש לפחות 3 מספרים טבעיים. לכן ההפרש בין פעמיים כמות הצבאים לבין כמות הצבאים הוא לפחות 4, ולכן כמות הצבאים היא לפחות 4. מכאן הכמויות של אריות, הדובים והג'יראפות הם לפחות 5, 6 ו-7 בהתאמה, ולכן הכמות הכוללת של חיות בגן החיות היא לפחות $4+5+6+7=22$. יתכן שאלו הכמויות האמיתיות, כי הכמויות 4, 5, 6 ו-7 עבור צבאים, אריות, דובים וג'יראפות בהתאמה אכן מקיימות את כל תנאי השאלה.

3. מדרגה היא צורה המורכבת מ-6 משבצות, שחופפת לצורה בציור. חותכים את לוח 8×8 למדרגות ולמשבצות בודדות. מהו המספר המרבי של מדרגות שניתן ליצור?



תשובה. 10.



פתרון. נשים לב כי שטחה של המדרגה הינו 6, ושטחו של הלוח 8×8 הינו 64. לכן לא ניתן לקבל יותר מ-10 מדרגות, כי $6\cdot11=66>64=8\cdot8$.

הציור מדגים כי אכן ניתן לקבל 10 צורות של מדרגה.

4. יש 7 כרטיסים צבעוניים. הכרטיס הראשון אדום מצד אחד וירוק מצד שני. הכרטיס השני אדום מצד אחד וצהוב מצד שני. הכרטיס השלישי אדום מצד אחד וכחול מצד שני. הכרטיס הרביעי כחול מצד אחד וירוק מצד שני. הכרטיס החמישי

אדום מצד אחד וצהוב מצד שני. כל אחד משני הכרטיסים הנוספים צהוב מצד אחד וסגול מצד שני. הכרטיסים מונחים על שולחן בשורה בסדר אקראי, כך שהצבעים שרואים הם:

כחול ירוק צהוב אדום צהוב ירוק סגול

לפי סדר זה.

אם נהפוך את הכרטיס האמצעי, איזה צבע יהיה לו?

<u>תשובה.</u> צהוב

<u>פתרון.</u> בהתחלה, נסדר את כל הנתונים על הכרטיסים בטבלה:

1	2	3	4	5	6	7
אדום	אדום	אדום	כחול	אדום	צהוב	צהוב
ירוק	צהוב	כחול	ירוק	צהוב	סגול	סגול

נשים לב כי יש רק שני כרטיסים שיש להם צד ירוק, ואלה הכרטיסים 1 ו-4. בגלל שאנחנו רואים על השולחן שני כרטיסים ירוקים, אלה חייבים להיות הכרטיסים הנ"ל, 1 ו-4.

אם כך, יש רק כרטיס כחול אחד שנשאר, ואנחנו רואים כרטיס כחול על השולחן, לכן זה כרטיס 3.

נתבונן עכשיו בכרטיס האמצעי. כרגע סך הכל נשארו לנו כרטיסים מספר 2, 5, 6 ו- 7. מבין הכרטיסים האלה יש רק שניים שיש להם צד אדום – כרטיסים 2 ו-5. לשני הכרטיסים האלה הצד השני הוא צהוב, לכן האפשרות היחידה שנותרה היא – צהוב.

5. שחזרו את המספרים בתרגיל הכפל. אותיות זהות מסמנות ספרות זהות ואותיות שונות מסמנות ספרות שונות.

```
          ח ש ב
        ×
          ח ב ר
          ------
        ח ת ו ל
 +    ו ע ב ר
    ר ל ו ש
   -------------
    ח ת ו ר ל ש
```

<u>תשובה.</u> התרגיל הוא 516×256.

<u>פתרון.</u> תחילה נשים לב, כי **ח**^{2} מסתיים ב-**ח**. לכן **ח** הוא 0, 1, 5 או 6.

לו **ח** היה 0 אז הספרות האחרונות של כל 3 המחוברים היו **ח**, והם לא.

לו **ח** היה 5, אז הספרות האחרונות של 3 המחוברים היו 0 או 5 כולן, ויש שם 3 ספרות שונות: **ח**, **ו**, **ר**.

לו **ח** היה 1, אז הספרות האחרונות של 3 המחוברים היו **ח**, **ש**, **ב**, והם לא – הם **ח**, **ו**, **ר**.

לכן **ח** יכול להיות רק 6.

בנוסף נשים לב כי בחיבור, העמודה השנייה מימין נותנת **ת** + **ו** = **ת**, ומכאן ש- **ו** = 0.

אבל **ו** זו הספרה האחרונה של **חשב** × **ב**. לכן 6 × **ב** מסתיים ב-0.

לכן **ב** הוא 0 או 5, אבל 0 כבר תפוס על ידי **ו**. לכן **ב** = 5.

```
          6 ש 5
        ×
          6 5 ר
          ------
        6 ת 0 ל
 +    0 ע 5 ר
    ר ל 0 ש
   -------------
    6 ת 0 ר ל ש
```

המחובר הראשון בסכום הוא $3600 = 6 \times 600 > 6 \times$ **חשב**.

המחובר השני הוא $2500 = 5 \times 500 < 5 \times$ **חשב**.

לכן אם נסתכל על הספרות המובילות של שני המחוברים הראשונים, נראה כי $2 \leq$ **ר** $\leq$ **ל** ≤ 3.

מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

אבל **ל** < **ר**. לכן **ל** = 3 , וגם **ר** = 2.

נתבונן בעמודה השנייה מימין בחיבור: 0 + **ע** + 2 מסתיים ב-0 (לא יתכן מעבר מהעמודה השנייה). לכן **ע** = 8.

לכן אנחנו יודעים את המחובר השני, שהוא 2580 = 5**ש**6 × 5.

מכאן קל לחשב כי $5ש6 = 2580/5 = 516$. כלומר, ש = 1.

ובכן, חישבנו את כל הספרות של שני הגורמים במכפלה, ומכאן לא קשה להשלים את מה שנשאר (שזה רק **ת** = 9).

$$\begin{array}{r} 516 \\ \times\ 256 \\ \hline 3096 \\ +\ 2580 \\ 1032 \\ \hline 132096 \end{array}$$

6. במחסן היו מספר גושים זהים של גבינה. בלילה הגיעו חולדות ואכלו 10 גושים. כולם אכלו כמות שווה של גבינה. למחרת לחלק מהחולדות כאבה הבטן ולמחסן הגיעו רק 7 חולדות, שכל אחת אכלה פי 2 פחות מאשר ביום הראשון, וכך הן סיימו את הגבינה. כמה גושי גבינה היו במחסן בהתחלה?

__**תשובה**__. 11 גושים.

__**פתרון**__. נניח שבהתחלה היו x חולדות. כל אחת אכלה $\frac{10}{x}$ גושים. למחרת 7 חולדות אכלו כל אחת $\frac{5}{x}$ גושים. זאת אומרת שסך הכל הן אכלו $\frac{35}{x}$ גושים, וידוע שזה מספר שלם. מאחר ו- $x > 7$, בהכרח $x = 35$. מכאן, ביום השני הן אכלו גוש אחד. לכן, בסך הכל היו 11 גושים.

7. על הלוח כתובים שני מספרים: 2014 ו-2015. בני ודני משחקים בתורות לסירוגין, ובני משחק ראשון. בכל מהלך מותר לבצע אחת משתי פעולות:

(א) להחליף מספר כלשהו בהפרש בין המספר הזה לבין ספרה לא אפסית כלשהי המופיעה על הלוח.

(ב) להחליף מספר זוגי כלשהו במספר שקטן ממנו פי 2.

השחקן הראשון שכותב על הלוח מספר חד-ספרתי מנצח.

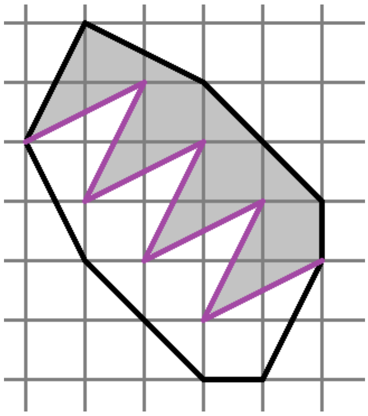
לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת? כיצד הוא צריך לשחק כדי לנצח?

__**תשובה**__ לבני יש אסטרטגיה מנצחת.

__**פתרון**__. במהלך הראשון בני מחסיר 1 מ-2015. נשים לב כי אחרי המהלך הזה שני המספרים שכתובים על הלוח שווים. בכל המהלכים הבאים בני יעתיק את פעולותיו של דני כך שבכל שלב אחרי מהלכו של בני שני המספרים שכתובים על הלוח יהיו שווים. בני ימשיך באסטרטגיה הזאת עד המהלך אחד לפני אחרון. נניח שבמצב מסויים על הלוח כתובים המספרים n , n , ודני יכול להפוך את אחד המספרים האלה למספר חד ספרתי. המצב הזה בטוח יקרה כי המספרים קטנים ממש כל הזמן, וזה לא יכול להמשך עד אינסוף. נתבונן במהלך אחד לפני המהלך הזה. על הלוח כתובים מספרים n , n $m > n$ והתור הוא של בני. אז במקום להוריד את m ל- n , דני יקטין את n כך שהוא יקבל מספר חד ספרתי.

8. חלקו את המתומן בציור לשני מצולעים שחופפים זה לזה.

הפתרון בציור.



מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

כיתות ח'

1. שלושה קיפודים מצאו שלושה גושי גבינה בעלי משקלים שונים. הם התקשו לחלק אותם בצורה הוגנת, ופנו לשועל לעזרה. השועל יכול לבצע כמות כלשהי של פעולות מהסוג הבא: לבחור שני גושים, לפרוס מכל אחד גרם אחד של גבינה, ולאכול את הפרוסות. האם השועל יכול להשאיר לקיפודים גושים שווי משקל, כאשר

א. משקלי הגושים הם 4, 10 ו-13 גרם?

ב. משקלי הגושים הם 4, 7 ו-11 גרם?

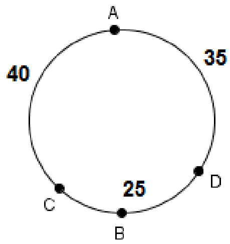
<u>תשובה לסעיף א'</u>. כן.

<u>פתרון לסעיף א'</u>. למשל, בשלב הראשון השועל יאכל 3 פעמים מהגוש הקטן ביותר והגדול ביותר. המצב אחרי זה יהיה: 1, 10, 10 גרם. אז השועל יאכל 9 פעמים משני הגושים הגדולים ויביא את הגושים למצב: 1, 1, 1.

<u>תשובה לסעיף ב'</u>. לא.

<u>פתרון לסעיף ב'</u>. כדי להפוך את הגושים של 11 ושל 7 גרם לשווי משקל, השועל חייב להשתמש בגוש השלישי. הפרש המשקלים ביניהם הינו 4 גרם, לכן השועל חייב להשתמש בגוש השלישי לפחות 4 פעמים. אבל הגוש השלישי שוקל 4 גרם, ואחרי שהשועל ישתמש בו 4 פעמים, לא יישאר מהגוש הזה כלום. זה לא מתאים לתנאיי הבעיה, לכן לשועל אין אפשרות להפוך את הגושים האלה לשווי משקל.

2. על כביש מעגלי ממוקמות 4 תחנות דלק: A, B, C, D. המרחק AB שווה ל-50 ק"מ, המרחק AC - 40 ק"מ, המרחק CD - 25 ק"מ, המרחק AD - 35 ק"מ. מהו המרחק BC? הערה: כל המרחקים פה הם לאורך הכביש.



<u>תשובה</u>. מרחק BC שווה ל-10 ק"מ.

<u>פתרון</u>. נתחיל מתחנה A, כי נתונים כל המרחקים ממנה. מאחר והמרחק CD לא שווה להפרש המרחקים AC ו-AD, אז התחנות C ו-D הן מצדדים שונים של A . מכאן שהיקף המעגל הינו $AC+CD+DA=100$. ידוע ש-$AB=50$, לכן A ו-B הינן קצוות של קוטר. לכן $BC=AB-AC=50-40=10$.

3. 11 מטבעות זהים למראה מונחים בשורה. מביניהם יש 3 מטבעות מזויפים שנמצאים ברצף במקום לא ידוע. המטבעות האחרים אמיתיים. כל המטבעות האמיתיים הינם שווי משקל, וגם כל המטבעות המזויפים הינם שווי משקל, אבל מטבע מזויף קל יותר ממטבע אמיתי. בכמה שקילות במאזני כף ניתן למצוא את המטבעות המזויפים?

<u>תשובה</u>. 2 שקילות.

<u>פתרון</u>. ראשית נראה כיצד בעזרת שקילה אחת ניתן לאתר שלישיית מטבעות מזויפים מתוך 5 מטבעות המסודרים בשורה

(כמו בבעיה המקורית, מטבעות מזויפים יותר קלים מהמטבעות האמיתיים, והם ממוקמים ברצף). נמספר את חמישיית המטבעות במספרים מ- 1 עד 5. בשקילה שנבצע, נשקול את מטבע 1 מול מטבע 5.

אם 1 קל יותר מ- 5, סימן שהוא ועוד שני המטבעות הצמודים לו, הם המזויפים, כלומר 1, 2, 3.

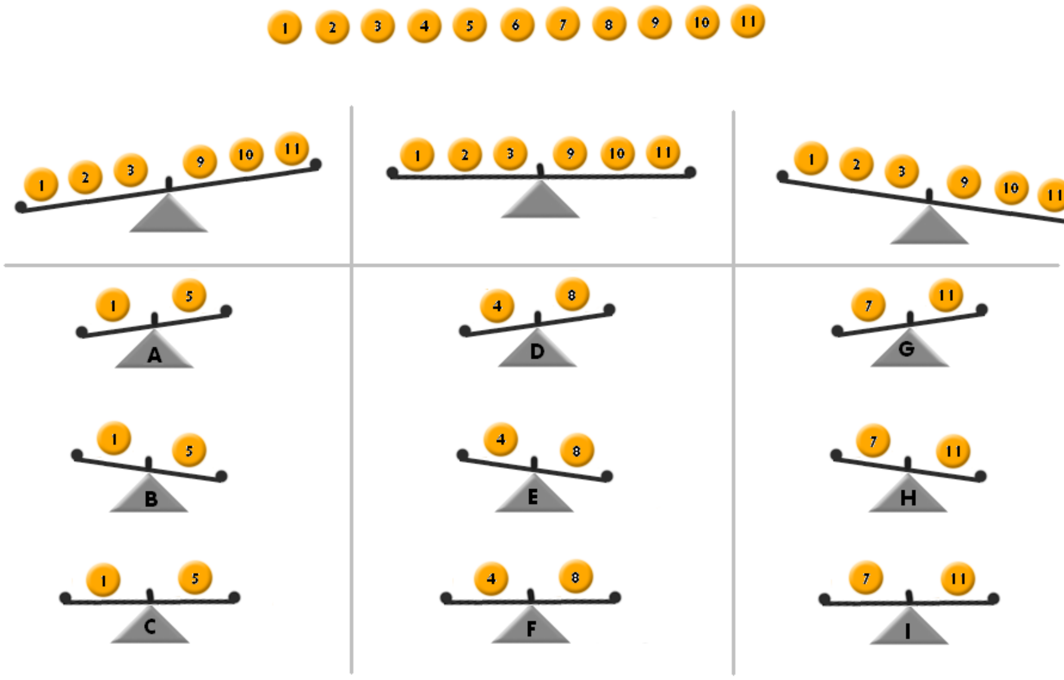
אם 1 שווה ל- 5, סימן שאף אחד מהם לא בקבוצת המזויפים. כלומר המטבעות המזויפים הם 2, 3, 4.

אם 5 קל יותר מ- 1, סימן שהוא ועוד שני המטבעות הצמודים לו, הם המזויפים, כלומר 3, 4, 5.

כעת נחזור לבעיה המקורית. נראה כי ניתן לאתר את שלישית המטבעות על ידי שתי שקילות בלבד.

נמספר את המטבעות במספרים מ- 1 עד 11 כפי שמתואר בציור.

בשקילה הראשונה נשקול את המטבעות 1, 2, 3 מול המטבעות 9, 10, 11. בעזרת השקילה הזאת נאתר את חמישיית המטבעות שמכילה את שלושת המטבעות המזויפים. בשקילה השנייה נמצא את המטבעות המזויפים מתוך החמישייה שמצאנו בדרך שהראנו לעיל.



בפירוט, נשקול את המטבעות לפי התרשים למעלה ולכל מקרה נתאים את השלישייה שלו כך (השורה הראשונה מתארת את השקילה הראשונה והשורה השנייה את השקילה שמתבצעת אחריה):

$$A\rightarrow 1,\ 2,\ 3;\quad B\rightarrow 3,\ 4,\ 5;\quad C\rightarrow 2,\ 3,\ 4\quad D\rightarrow 4,\ 5,\ 6;\quad E\rightarrow 6,\ 7,\ 8;$$

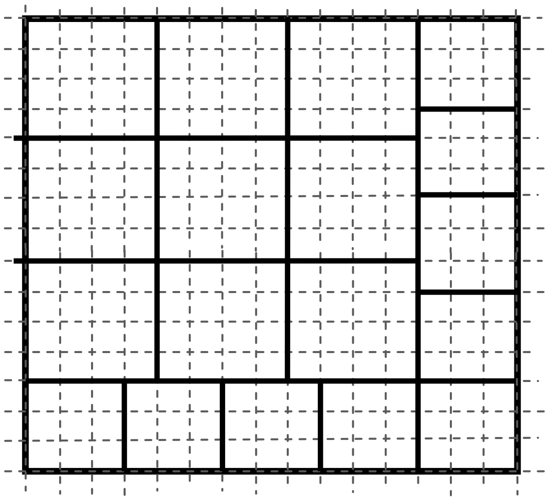
$$F\rightarrow 5,\ 6,\ 7;\quad G\rightarrow 7,\ 8,\ 9;\quad H\rightarrow 9,\ 10,\ 11;\quad I\rightarrow 8,\ 9,\ 10$$

לא ניתן לאתר את המטבעות באמצעות שקילה אחת בלבד, משום שבכל שקילה אנחנו מחלקים את מספר האפשרויות ב-3. כיוון שיש לנו 9 אפשרויות למיקום המטבעות, המספר המינימאלי של שקילות הוא 2.

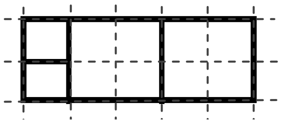
4. הראו, כי ניתן לגזור ריבוע לריבועים קטנים יותר, כך שאת הריבועים שהתקבלו יהיה אפשר לחלק לשתי קבוצות, בכל קבוצה מספר ריבועים שווה. בכל קבוצה כל הריבועים חופפים, אך הריבועים מהקבוצה הראשונה אינם חופפים לריבועים

מהקבוצה השנייה.

<u>פתרון 1.</u> אם גודלו של הריבוע הקטן הוא $a\times a$ משבצות וגודלו של הריבוע הגדול יותר הוא $b\times b$ משבצות, אז אפשר לחפש פתרון מהשוויון $c^2=na^2+nb^2$, כאשר c^2 הינו מספר המשבצות אשר מכיל הריבוע הנגזר. עבור $n=9$ $a=3$, $b=4$, $c=15$ מקבלים את הדוגמא שמתוארת בציור:



<u>פתרון 2.</u> משני ריבועים 1×1 ושני ריבועים 2×2 אפשר להרכיב מלבן 5×2 (ראו ציור), ומ-10 מלבנים כאלה מרכיבים ריבוע 10×10.



5. נתונים 51 מספרים דו ספרתיים שונים. הוכיחו שניתן לבחור 6 מתוכם, כך שבכל זוג מתוך השישה מופיעות שתי ספרות עשרות שונות ושתי ספרות אחדות שונות.

<u>פתרון</u>. נרשום את כל המספרים הדו-ספרתיים בטבלה הבאה: בשורה הראשונה נכתוב את כל המספרים הדו-ספרתיים שמתחילים ב-1, ומתחת לכל מספר נכתוב מספר שמתקבל ממנו על ידי הוספת 1 לכל אחת מהספרות שלו (ואת הספרה 9 מחליפים בספרה 0).

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	22	23	24	25	26	27	28	29	20
32	33	34	35	36	37	38	39	30	31
43	44	45	46	47	48	49	40	41	42
54	55	56	57	58	59	50	51	52	53
65	66	67	68	69	60	61	62	63	64
76	77	78	79	70	71	72	73	74	75
87	88	89	80	81	82	83	84	85	86
98	99	90	91	92	93	94	95	96	97

נשים לב כי בכל אחת מהעמודות כל ספרות האחדות הן שונות זו מזו, וכך גם כל הספרות העשרות. בנוסף, אם ניקח 51 מספרים דו-ספרתיים, אז ,לפי עקרון שובך יונים, שישה מהם חייבים להשתייך לאותה עמודה.

6. המספרים $1, 2, \ldots, 10$ מסודרים במעגל. כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק.

א. הוכיחו כי קיימים שלושה מספרים עוקבים שסכומם לפחות 18.

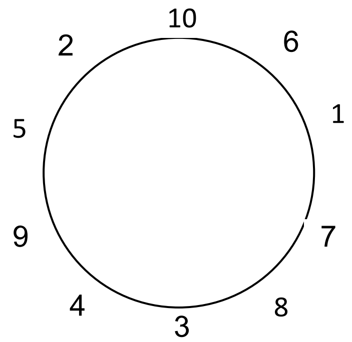
ב. בנו דוגמה בה אף סכום של שלושה מספרים עוקבים אינו גדול מ-18.

__פתרון. א.__ סכום כל המספרים במעגל הוא

$$1+2+\ldots+10=\frac{1}{2}\left(\left(1+10\right)+\left(2+9\right)+\ldots+\left(10+1\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 10=55.$$

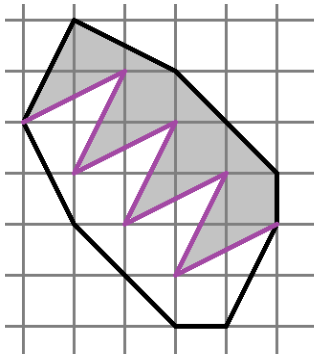
נתבונן בכל המספרים חוץ מ-1. סכומם 54.
9 המספרים האלה במעגל מחולקים ל-3 שלשות. אם סכום בכל שלושה לכל היותר 17, אז סכומם לכל היותר 51.
סתירה.

__ב.__ למשל,



7. חלקו את המתומן שמופיע בציור לשני מצולעים חופפים זה לזה.

הפתרון בציור

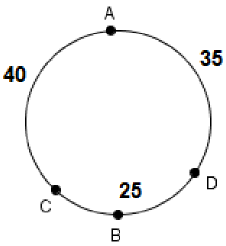


אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

מדינת ישראל
משרד החינוך

כיתות ט'

1. על כביש מעגלי ממוקמות 4 תחנות דלק A, B, C, D. המרחק (לאורך הכביש) AB שווה ל-50 ק"מ, המרחק AC – 40 ק"מ, המרחק CD- 25 ק"מ, המרחק AD- 35 ק"מ. מהו המרחק BC?



<u>תשובה</u>. מרחק BC שווה ל-10 ק"מ.

<u>פתרון</u>. נתחיל מתחנה A, כי נתונים כל המרחקים ממנה. מאחר והמרחק CD לא שווה להפרש המרחקים AC ו-AD, אז התחנות C ו-D הן מצדדים שונים של A . מכאן שהיקף המעגל הינו $AC+CD+DA=100$. ידוע ש- $AB=50$, לכן A ו-B הינן קצוות של קוטר. לכן $BC=AB-AC=50-40=10$.

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה.

$$1+\frac{3}{3-x}\cdot\left(1+\frac{2}{2-x}\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\right)+x=0$$

<u>תשובה:</u> $x=-2$

<u>פתרון:</u> נטפל בשברים החל מהסוגריים הפנימיות.

נקבל בהדרגה: $1+\frac{3}{3-x}\cdot\left(1+\frac{2}{1-x}\right)+x=0$

$$1+x+\frac{3}{1-x}=0$$

$$1-x^2+3=0$$

$$x^2=4$$

תחום ההגדרה של הפתרונות הוא $x\neq 1\,,2\,,3$ ולכן נשאר $x=-2$. כדאי גם לבדוק שתשובה זו מתאימה (נשאיר את זה כתרגיל לקוראים).

3. האם קיים a עבורו $a+\sqrt{15}$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ שניהם שלמים?

<u>תשובה</u>: קיימים בדיוק 2 ערכים של a עבורם הערכים של הביטויים $a+\sqrt{15}$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ הם שלמים, והם $a=4-\sqrt{15}$ ו- $a=-4-\sqrt{15}$.

<u>פתרון</u>: נסמן $a+\sqrt{15}=N$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=M$ כאשר M,N הינם שלמים.

נעביר אגפים: $a=N-\sqrt{15}$, נציב ונקבל $\frac{1}{N-\sqrt{15}}-\sqrt{15}=M$, ומכאן $1=\left(M+\sqrt{15}\right)\cdot\left(N-\sqrt{15}\right)$,

כלומר, $16-MN=\sqrt{15}\left(N-M\right)$.

אם $M=N$, נקבל $16-MN=0$, כלומר, $16=M^2$ ומכאן $M=\pm4$ וגם $N=\pm4$.

עבור $M=4, N=4$ נקבל $a=4-\sqrt{15}$. עבור $M=-4, N=-4$ נקבל $a=-4-\sqrt{15}$.

אם $M \neq N$ נקבל $\frac{16-MN}{N-M}=\sqrt{15}$.

מאחר ושני הביטויים $16-MN$ וגם $N-M$ הינם שלמים, נקבל כי $\sqrt{15}$ הינו רציונאלי - סתירה.

4. המספרים $1, 2, \dots , 10$ מסודרים במעגל. כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק.

א. הוכיחו כי קיימים במעגל שלושה מספרים עוקבים שסכומם לפחות 18.

ב. בנו דוגמה בה אף סכום של שלושה מספרים עוקבים אינו גדול מ-18.

<u>פתרון. א.</u> הסכום של כל השלשות שיש הוא פי 3 מסכום המספרים במעגל, כלומר

$$3\cdot(1+2+\ldots+10)=\frac{3}{2}\cdot 2(1+2+\ldots+10)=$$

$$=\frac{3}{2}\left((1+10)+(2+9)+\ldots+(10+1)\right)=\frac{3}{2}\cdot 11\cdot 10=3\cdot 55=165$$

כלומר בממוצע הסכום בשלשה רצופה זה 16.5, כלומר יש שלשות עם סכום 17 לפחות.

אבל נניח שהסכום הכי גדול בשלשות הוא 17. אם יש שתי שלשות שיש להן שני מספרים משותפים, אז הסכום שלהן שונה (כי המספר השלישי הוא אחר). לכן אם נרשום את סכומי השלשות הרצופות במעגל, מכל צד של כל 17 יהיה מספר שהוא 16 לכל היותר.

ובכן, נתבונן בסכומים בשלשות. יש 10 מספרים במעגל, שכל אחד מהם 17 לכל היותר, ליד כל 17 רשום 16 לכל היותר והממוצע של כולם 16.5. עם נחסיר $\frac{1}{2}$ מכל 17 ונעביר למספר שמימינו, כל מספר יהיה 16.5 לכל היותר, והממוצע שלהם עדיין יהיה 16.5. לכן כל המספרים הם 17 ו-16 שמסודרים לסירוגין.

נניח שהמספרים a,b,c,d,e,f,g נמצאים על המעגל המקורי בסדר זה כאשר $a+b+c=17$ (ניתן לבחור סימונים כאלה).

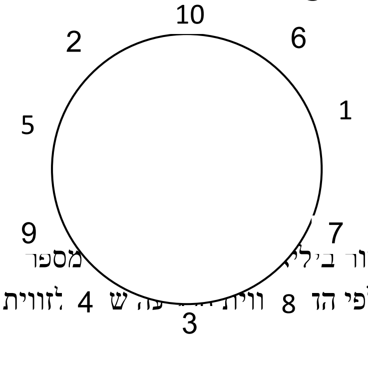
אז גם $c+d+e=e+f+g=17$, וגם $b+c+d=d+e+f=16$, הרי סכומים של 16 ו-17 באים לסירוגין.

אז $(a+b+c)-(b+c+d)=a-d=1$, כלומר $a=d+1$.

באופן דומה $(e+f+g)-(d+e+f)=g-d=1$, כלומר $g=d+1=a$.

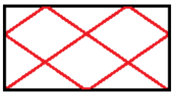
אבל a ו- g הם מספרים שונים, לכן לא יתכן שכל הסכומים הם 17 לכל היותר.

<u>ב.</u> למשל,

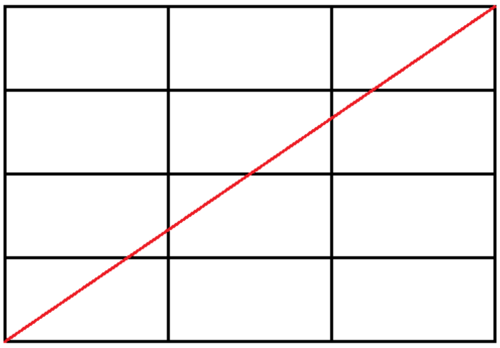


5. נתון שולחן ביליארד מלבני, שיש לו כיסים רק בפינות. מאחת הפינות שולחים כדור [illegible] מספר התנגשויות, הכדור מגיע לכיס באיזושהי פינה (ההתנגשויות עם הקירות מתרחשות לפי הז[illegible]וית [illegible] לזווית ההחזרה). האם ייתכן שהכדור מגיע לכיס שממנו התחיל?

<u>תשובה.</u> לא.



<u>פתרון ראשון.</u> נניח שהכדור נשלח מהפינה השמאלית התחתונה. במקום לצייר תמונה שבה הכדור מוחזר הרבה פעמים מהקירות ומתקדם בקו שבור מורכב, אפשר לצייר תמונה שבה הכדור זז בקו ישר, וכל פעם השולחן משוקף ביחס לאחד הקירות. בעצם אפשר להגיד שהכדור נע בקו ישר במישור, שמרוצף על ידי מלבנים שחופפים לשולחן המקורי. אם הכדור יעבור מרחק שגדול פי M מרוחב השולחן במאוזן, ומרחק שגדול פי N מגובה השולחן במאונך, כאשר M ו-N מספרים שלמים, אז הכדור יכנס לאחד הכיסים. אם M זוגי אז בציור המקורי הכדור חוזר אחורה בכיוון המאוזן והולך קדימה במאוזן אם M אי-זוגי. דבר דומה אפשר להגיד על הכיוון האנכי. על מנת שהכדור יחזור לאותו כיס, חייבים ש-M ו-N יהיו זוגיים בו-זמנית ברגע הראשון שבו הכדור מגיע לכיס. אבל זה לא יתכן, כי אז כשהכדור היה עובר $\frac{M}{2}$ שולחנות לרוחב ו- $\frac{N}{2}$ שולחנות לגובה, כבר אז הוא היה נכנס לכיס. לכן לא יתכן שזה הרגע הראשון שבו הכדגור נכנס לכיס.



<u>פתרון שני.</u> קל לראות, שהכדור כל הזמן באותו שיפוע ביחס לשולחן (רק שבפעמים הזוגיות ובפעמים האי-זוגיות הקטעים עולים פעם ימינה ופעם שמאלה). לכן אם הכדור נכנס לאותו כיס, אז הוא נכנס גם באותו כיוון. לכן הקטע הראשון של הקו השבור מתלכד עם החלק האחרון, החלק השני מתלכד עם הקטע השני מהסוף, וכך הלאה: הקטע מספר N מההתחלה מתלקד עם הקטע מספר N מהסוף, רק שהכדור עובר את שני הקטעים בכיוון השני. לכן את הקטעים באמצע הקו הכדור חייב לעבור בכיוונים הפוכים. לכן באמצע הקו הכדור חייב להסתובב במקום ב- 180°, וזה בלתי אפשרי.

6. נתונים שלושה מספרים a,b,c המקיימים $0\le a,b,c\le 1$, $a+b+c=\frac{3}{2}$. הוכיחו כי $ab+ac+bc\ge\frac{1}{2}$

<u>פתרון 1</u>. נשים לב כי $0\le(1-a)(1-b)(1-c)+abc$.

נפתח סוגריים: $0\le 1-(a+b+c)+ab+bc+ca$.

נעביר אגפים: $\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-1=(a+b+c)-1\le ab+ba+ca$. משל.

הערה: על מנת להמציא את הפתרון, צריך להבין באילו מקרים אי-שוויון זה הופך לשוויון. זה קורה כשהמשתנים שווים ל- $\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

<u>פתרון 2</u>. ננסה לקבע את c לשנות רק את a ו- b. נסמן $k=\frac{a+b}{2}$, אז $a=k+\delta,\ b=k-\delta$.

אז $ab+bc+ac=ab+c(a+b)=k^2-\delta^2+2ck$.

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

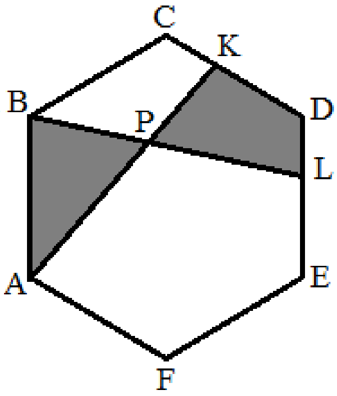
מדינת ישראל
משרד החינוך

נשים לב כי ככל שהערך של הביטוי הזה קטן יותר, ערך של δ גדול יותר. אבל δ לא יכול להיות גדול מידי, כי אז או ש- a הופך להיות קטן מ-0, או ש- b הופך להיות גדול מ-1. מכאן שלכל c נתון, הביטוי $ab+ba+ca$ מקבל ערך מינימלי כאשר $a=0$ או $b=1$.

נשים לב כי בחרנו את c באופן שרירותי, ובמקומו היינו יכולים לבחור כל מספר אחר מתוך השלישייה הזאת. לכן במצבים בהם הביטוי $ab+bc+ca$ מקבל ערך מינימלי, לפחות שניים מהמספרים a, b ו- c חייבים להיות 0 או 1. האפשרות היחידה שמקיימת את התנאים הללו היא – $(a,\ b,\ c)=\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

7. במשושה משוכלל ABCDEF על הצלע CD נמצאת נקודה K, ועל הצלע DE נקודה L. הקטעים AK, BL נפגשים בנקודה P. נתון כי המרובע KPLD והמשולש PAB שווים בשטחם. מצאו את הזווית APB.

תשובה. 60°.



פתרון. נוסיף לשני החלקים הצבועים את המרובע PBCK. נקבל שהמרובעים ABCK ו-BCDL שווים בשטחם. סיבוב ב- 60° ביחס למרכז המשושה מעביר את A ל-B, את B ל-C, את C ל-D, את K לנקודה חדשה M, ואת המרובע ABCK למרובע BCDM בעל אותו שטח, שהוא גם שטחו של BCDL. אז לא יתכן ש-M נמצא בין L ל-D, כי אז המרובע BCDM קטן בשטחו מ-BCDL (הרי הוא מוכל בו). לא יתכן גם ש-M נמצא בין L ל-E, כי אז BCDM גדול בשטחו מ-BCDL (הרי הוא מכיל אותו). לכן M = L.

ובכן, סיבוב ב- 60° מעביר את הקטע AK לקטע BL, לכן הזווית בין AK ל-BL, שזו בעצם הזווית APB, שווה ל- 60°.