אוניברסיטת תל אביב

מדינת ישראל
משרד החינוך

15.12.2016 ט"ו בכסלו תשע"ו

אולימפיאדה רביעית ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ז'

1. אילו מספרים תלת-ספרתיים יש יותר: זוגיים שמתחלקים ב-5 או אי-זוגיים שמכילים את הספרה 2?

תשובה. אותה כמות.

פתרון. מספרים זוגיים שמתחלקים ב-5 זה מספרים שמסתיימים ב-0. כמות שלהם שווה לכמות של מספרים דו-ספרתיים, כלומר המספרים מ-10 עד 99, ויש בדיוק 90 כאלה.

נחשב את הכמות השנייה. מספרים אי-זוגיים מסתיימים ב-1 מ-5 ספרות: 1, 3, 5, 7 או 9, ואף אחת מהן לא 2, לכן 2 צריכה להופיע במספר דו-ספרתי צד שמאל של המספר. קיימים 10 מספרים דו-ספרתיים שמתחילים ב-2 ויש גם 9 מספרים דו-ספרתיים שמסתיימים ב-2. אבל כמות המספרים הדו-ספרתיים שמכילים ספרה 2 היא לא $10+9$, כי אנחנו לא רוצים לספור את 22 פעמיים, לכן זה 18. כאשר מוסיפים לאחד מבין 18 המספרים הדו-ספרתיים, שמכילים ספרה 2, את אחת מבין 5 הספרות האי-זוגיות מימין, נקבל $18\cdot 5=90$ אפשרויות.

2. לחנות הביאו 300 קיווי בשקיות, כאשר כל שקית מכילה 13 או 14 קיווי. כמה שקיות יכולות להיות?

תשובה. 22 או 23.

פתרון. ב-22 שקיות של 13 יש בדיוק $260+26=286$ פירות, ונשארות 14 פירות, שאפשר לשים בשקית אחת, שזה נותן לנו 23 שקיות בסה"כ.

אפשרות אחרת זה לסדר 22 שקיות של 13, ואז להוסיף פרי אחד ל-14 מהשקיות. אז יהיו 22 שקיות בסה"כ.

אי-אפשר פחות מ-22, כי 21 שקיות אפילו של 14 זה $14\cdot 21=200+80+10+4=294$ וזה מספיק.
אי-אפשר יותר מ-23, כי 24 שקיות של 13 זה כבר $13\cdot 24=260+52>300$.

3. מצאו 4 מספרים טבעיים שונים a, b, c ו- d , כך ש- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{7}$.

תשובה אפשריות. $\frac{1}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{462}=\frac{3}{7}$.

הערה. כיצד למצוא כזה דבר? אם נחסיר $\frac{1}{2}$ מ- $\frac{3}{7}$, נקבל מספר שלילי, לכן ננסה לקחת $a=3$. אז $\frac{2}{21}=\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. ניקח $b=21$ ונשאר לפתור $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{21}$. לוקחים $c=22$ ומקבלים תשובה.

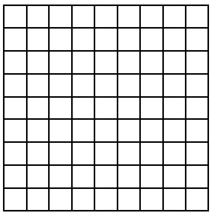
הערה נוספת. יש 130 רביעיות של מספרים, שפותרים את השאלה, וכל רביעייה ניתן לרשום ב-24 סדרים, לכן יש $24\cdot 130$ תשובות בסה"כ. בעמוד הבא יש רשימה מלאה של כל התשובות בסדר עולה. כמובן, רשימה כזאת עדיף ליצור באמצעות מחשב ולא עם דף ועת.

(3,11,232,53592)	(3,11,234,18018)	(3,11,238,7854)	(3,11,240,6160)
(3,11,242,5082)	(3,11,252,2772)	(3,11,264,1848)	(3,11,280,1320)
(3,11,294,1078)	(3,11,308,924)	(3,11,330,770)	(3,11,352,672)
(3,11,378,594)	(3,12,85,7140)	(3,12,86,3612)	(3,12,87,2436)
(3,12,88,1848)	(3,12,90,1260)	(3,12,91,1092)	(3,12,92,966)
(3,12,93,868)	(3,12,96,672)	(3,12,98,588)	(3,12,100,525)
(3,12,102,476)	(3,12,105,420)	(3,12,108,378)	(3,12,112,336)
(3,12,120,280)	(3,12,126,252)	(3,12,132,231)	(3,12,133,228)
(3,12,140,210)	(3,12,147,196)	(3,12,156,182)	(3,13,56,2184)
(3,13,78,182)	(3,13,84,156)	(3,14,43,1806)	(3,14,44,924)
(3,14,45,630)	(3,14,46,483)	(3,14,48,336)	(3,14,49,294)
(3,14,51,238)	(3,14,54,189)	(3,14,56,168)	(3,14,60,140)
(3,14,63,126)	(3,14,70,105)	(3,14,78,91)	(3,15,36,1260)
(3,15,40,280)	(3,15,42,210)	(3,15,60,84)	(3,16,32,672)
(3,16,35,240)	(3,16,42,112)	(3,16,48,84)	(3,17,28,1428)
(3,18,26,819)	(3,18,27,378)	(3,18,28,252)	(3,18,35,90)
(3,18,36,84)	(3,18,42,63)	(3,19,24,1064)	(3,20,24,280)
(3,20,28,105)	(3,20,30,84)	(3,20,35,60)	(3,21,22,462)
(3,21,24,168)	(3,21,28,84)	(3,21,30,70)	(3,24,28,56)
(3,24,35,40)	(4,6,85,7140)	(4,6,86,3612)	(4,6,87,2436)
(4,6,88,1848)	(4,6,90,1260)	(4,6,91,1092)	(4,6,92,966)
(4,6,93,868)	(4,6,96,672)	(4,6,98,588)	(4,6,100,525)
(4,6,102,476)	(4,6,105,420)	(4,6,108,378)	(4,6,112,336)
(4,6,120,280)	(4,6,126,252)	(4,6,132,231)	(4,6,133,228)
(4,6,140,210)	(4,6,147,196)	(4,6,156,182)	(4,7,29,812)
(4,7,30,420)	(4,7,32,224)	(4,7,35,140)	(4,7,36,126)
(4,7,42,84)	(4,7,44,77)	(4,8,19,1064)	(4,8,20,280)
(4,8,21,168)	(4,8,24,84)	(4,8,28,56)	(4,8,35,40)
(4,9,15,1260)	(4,9,18,84)	(4,10,14,140)	(4,10,15,84)
(4,10,20,35)	(4,11,12,231)	(4,12,14,42)	(4,12,15,35)
(5,6,20,84)	(5,6,21,70)	(5,6,30,35)	(5,7,12,420)
(5,7,14,70)	(5,7,20,28)	(5,8,10,280)	
(6,7,9,126)	(6,7,12,28)	(6,7,14,21)	

אוניברסיטת תל אביב

מדינת ישראל
משרד החינוך

4. בעיר יש 10 רחובות מצפון לדרום, ו-10 רחובות ממזרח למערב, אורך של כל רחוב 9 קילומטרים (כמו בציור). המרחקים בין רחובות מקבילים צמודים הם 1 קילומטר. נסיעה בכל כביש עולה כמות שונה של כסף: בכביש האופקי הדרומי ביותר המחיר הוא שקל לקילומטר, בכביש המקביל, שנמצא מרחק N קילומטרים ממנו, המחיר N+1 שקלים לקילומטר, בכביש האנכי המערבי ביותר המחיר הוא שקל לקילומטר, ובכל כביש אנכי, שנמצא במרחק N קילומטרים ממנו המחיר הוא N+1 שקלים לקילומטר. מהו המחיר הקטן ביותר עבור נסיעה מהפינה הדרום-מערבית לפינה הצפון-מזרחית של העיר?



תשובה. 99 שקלים.

פתרון. נמספר את הכבישים האופקיים מדרום לצפון (כביש דרומי ביותר הוא מספר 1, וכביש צפוני ביותר מספר 10). נמספר את הכבישים האנכיים ממערב למזרח בצורה דומה, מ-1 עד 10. על כל צומת נרשום את מכפלת הכבישים שלו (נקבל בעצם לוח קפל). קל לראות, שמחיר המעבר בין שני צמתים סמוכים הוא הפרש של המספרים שרשמנו על הצמתים. לכן המחיר של מעבר בין פינה דרום-מערבית שרשום עליה 1 לבין פינה צפון-מזרחית שרשום עליה 100 הוא לפחות 99 שקלים. השוויון מתקבל, כאשר אנחנו כל הזמן נתקדם צפונה ומזרחה, כלומר יש הרבה דרכים, שנותנות את המספר הזול ביותר.

5. שודדי הים הארי, תום וצ'רלי קיימו דיון:

הארי: לתום יש שתי עיניים.
תום: לצ'רלי יש שתי עיניים.
צ'רלי: להארי יש שתי עיניים.
הארי: לשלושתנו יש סה"כ 2 עיניים.
תום: לשלושתנו יש סה"כ 3 עיניים.
צ'רלי: לשלושתנו יש סה"כ 4 עיניים.

התברר, שכל אחד מהם שיקר מספר פעמים ששווה לכמות העיניים שלו.
כמה עיניים יש לכל אחד מהם?

תשובה. סה"כ 4 עיניים: שניים לתום, אחד להארי ולצרלי.

פתרון. בחצי השני של הדיון נאמרו 3 אמירות סותרות, לכן לפחות 2 מהן שקריות.

בחצי הראשון של דיון גם נאמרו לפחות 2 אמירות שקריות. אכן, אם שני שודדים אמרו אמת בחצי הראשון של הדיון, אז אחד מהם סיפר על השני, שיש לו שתי עיניים, כלומר, השני משקר כל הזמן.

לכן, נאמרו לפחות 4 אמירות שקריות, לכן, יש לפחות 4 עיניים, בפרט יש שודד עם 2 עיניים, שמשקר תמיד, ויש שודד אחר, שאמר, שיש לשודד זה 2 עיניים.

לכן, גם בחלק הראשון של הדיון נאמר משפט אמיתי. מצד שני, ראינו, שבחלק הראשון של הדיון נאמר רק משפט אחד אמיתי, לכן, יש רק שודד אחד עם שני עיניים. לכן, יש שני שודדים עם עין אחד לכל היותר.

לכן, יש לכל היותר 4 עיניים בסה"כ וגם לפחות 4, כלומר, יש בדיוק 4 עיניים. לכן, צ'רלי אמר אמת בסוף הדיון. גם בחצי הראשון וגם בחצי השני של הדיון נאמר משפט אמיתי אחד. תום או הארי אמר אמת בחצי הראשון של הדיון. אבל זה בטח לא תום, כי אם תום אמר אמת, צ'רלי תמיד משקר, והרי צ'רלי אמר כמות נכונה של עיניים.

לכן, הארי אמר אמת לגבי כמות עיניים של תום, ולכן תום שקרן, ויש לו שני עיניים, להארי ולצ'רלי יש עין אחת.

6. החליפו אותיות בספרות, על מנת שתרגיל הכפל יהיה נכון.
אותיות זהות מסמנות ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות.

			ב	ו	ט
×			ל	ה	ק
			ק	ל	ח
+		ה	ג	ה	
	ל	ב	א		
	ל	ח	ה	ח	ח

תשובה. 253×107.

פתרון. נשים לב, כי **טוב**×**ק** מתחיל ב-**ק**, **טוב**×**ה** מתחיל ב-**ה**, וגם **טוב**×**ל** מתחיל ב-**ל**. לכן **ב** = 1, ולכן גם המספרים **ו**×**ק** , **ו**×**ה** , **ו**×**ל** קטנים מ-10. אבל הספרות **ק**, **ה**, **ל** הן לא אפסיות, וגם לא 1, כי זה תפוס על ידי **ב**. לכן **ו** כפול 3 ספרות שונות שכולן 2 לפחות נותן מספר שקטן מ-10. לכן **ו** הוא 0 אן 2. אבל אם **ו** הוא 2, אז ספרות **ק**, **ה**, **ל** לא יכולות להיות 2, 3, 4 בסדר כלשהו, לכן אחת מהן היא לפחות 5. לכן אבל אז כאשר מכפילים ב- **ו** מקבלים מספר דו-ספרתי. לכן **ו** = 0.

			1	0	ט
×			ל	ה	ק
			ק	ל	ח
+		ה	ג	ה	
	ל	1	א		
	ל	ח	ה	ח	ח

כאשר מתבוננים בעמודה שנייה משמאל רואים כי **ה** + 1 + דברים שעברו מעמודה שלישית נותנים **ח**, לכן **ח** הוא **ה** + 1 או **ה** + 2 או **ה** + 3. לא יתכן שמקבלים בחיבור זה את **ח** + 10, כי זה היה משמיד את **ל** בעמודה השמאלית.
מצד שני, כאשר מתבוננים בעמודה שנייה מימין, גם שם מחברים **ה** עם **ל** ומקבלים מספר שמסתיים ב-**ח**. לכן **ל** הוא 1, 2 או 3. אבל 1 כבר תפוס, לכן **ל** הוא 2 או 3.

תופעה אחרת שכדאי לשים לב אליה היא **ט**×**ה** מסתיים ב-**ה**. לכן **ה**×(**ט**–1) מתחלק ב-10, ובפרט גם ב-5. לכן **ט** מתחלק ב-5 או **ה**–1 מתחלק ב-5, כלומר **ה** הוא 0 או 5, או ש-**ט** הוא 1 או 6. אבל הספרות 1, 0 כבר תפוסות, לכן או ש-**ה** הוא 5, או ש-**ט** הוא 6.

			1	0	6
×			ל	ה	ק
			ק	ל	ח
+		ה	ג	ה	
	ל	1	א		
	ל	ח	ה	ח	ח

נפריד למקרים. נתחיל במקרה של **ט** = 6. אז **ה** יכול להיות מספר זוגי כלשהו מבחינת הזהות **ט**×**ה** מסתיים ב-**ה**, אבל אז **ק**, **ל** בהכרח אי-זוגיים מאותה סיבה (אחרת **טוב**×**ל** עלול להסתיים ב- **ל**). הוכחנו כבר קודם כי **ל** הוא 2 או 3.

לכן **ל** = 3.

			1	0	6
×			3	ה	ק
			ק	3	ח
+		ה	ג	ה	
	3	1	א		
	3	ח	ה	ח	ח

נתבונן בכפל הראשון **טוב**×**ק** = **חלק**, אז בהסתמך על מה שאנחנו כבר יודעים מתקבל 6×**ק** = **ח**3, כלומר **ק** הוא 5 או 6, אבל 6 כבר תפוס, לכן 5. אבל אז מתקבל **ח** = 0, שגם הוא כבר תפוס על ידי **ו**. לכן אין אפשרות כזאת.
בזה פסלנו מקרה **ט** = 6, ולכן **ה** = 5.

			1	0	ט
×			ל	5	ק
			ק	ל	ח
+		5	ג	5	
	ל	1	א		
	ל	ח	5	ח	ח

מכאן קל לראות ש- **ט** אי-זוגי.
כבר ראינו ש- **ל** הוא 2 או 3. לכן **ח** = **ל**+5 הוא 7 או 8, וניתן להגיד גם כי **חל** הוא 27 או 38. אבל גם **חל** הוא **ט**×**ק**. אבל 38 מתחלק ב-19, ולכן הוא לא מכפלה של שני מספרים חד-ספרתיים (הרי 19 ראשוני, ואם מכפלה של שני מספרים מתחלקת ב-19 אחד מהם מתחלק ב-19).

לכן **חל** הוא בהכרח 27. זה מאפשר לנו להחליף את **ח** ב-7 ואת **ל** ב-2 בכל התרגיל, ועדיין כדאי לזכור ש- **חל** הוא **ט**×**ק**. יש רק דרך אחת לפרק את 27 למכפלה של שני מספרים חד-ספרתיים וזה $3\cdot 9$ לכן **ט**,**ק** הם 3,9 בסדר כלשהו.

			1	0	ט
×			2	5	ק
			ק	2	7
+		5	ג	5	
	2	1	א		
	2	7	5	7	7

ניתן להפריד בין שני המקרים על ידי הכפל השלישי למשל, **ט**10 כפול 5 זה מספר שהספרה האמצעית שלו 1, לכן **ט** הוא לא 3 אלה 9, ו- **ק** הוא 3, ומכאן קל לקבל את כל הספרות האחרות.

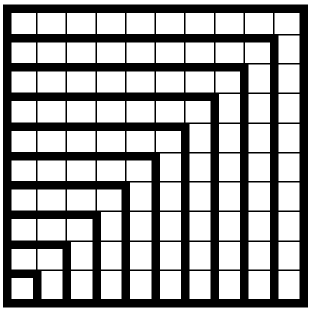
כאשר משלימים את כל הספרות האחרות, רואים שזה עובד.

			1	0	9
×			2	5	3
			3	2	7
+		5	4	5	
	2	1	8		
	2	7	5	7	7

מהפתרון שהצגנו רואים כי זו תשובה יחידה.

7. סכום של עשרה מספרים שלמים חיוביים שונים קטן או שווה ל-100.
הוכיחו כי לשניים מהם יש מחלק משותף שגדול מ-1.

פתרון. נניח, שיש רשימה, שבה כל זוג מספרים הם זרים. עם יש ברשימה זאת מספר פריק, נחליף אותו בגורם ראשוני שלו. זה יקטין את הסכום, ועדיין לא יהיו מחלקים משותפים. לכן אם קיימת רשימה כזאת, ניתן להניח שיש בה רק מספרים ראשוניים או אולי 1. על מנת לקבל סכום הכי קטן, ניקח את 1 ונוסיף 9 מספרים ראשוניים הכי קטנים:



$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad 17,\quad 19,\quad 23$$

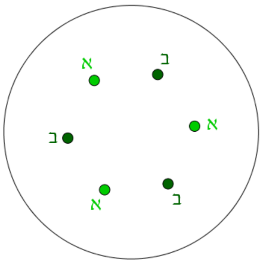
נחשב את הסכום של המספרים האלה.

כמו שרואים בתמונה, סכום המספרים האי-זוגיים נותן ריבוע:

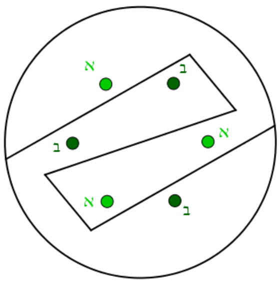
$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$$

זה לא בדיוק הסכום בקבוצה שלנו. יש כאן 9 ו-15 שהם מיותרים, אבל חסרים 2 ו-23. אבל $9+15=24$, בזמן ש- $2+23=25$, כלומר הסכום בקבוצה שמצאנו הוא גדול ב-1, כלומר 101, ובכל קבוצה אחרת אפילו יותר.

8. צורת פארק היא עיגול שרדיוסו 2 קילומטרים. בתוך הפארק נמצאים שישה עצים בקודקודיו של משושה משוכלל, כולם במרחק קילומטר ממרכז הפארק. כשסופרים את העצים בכיוון השעון העצים הזוגיים הם ברושים, והאחרים אלונים, כמו בציור. האם ניתן לחלק את הפארק לשני חלקים חופפים באמצעות גדר שלא חותכת את עצמה, כך שחלק אחד יכיל את כל האלונים וחלק אחר יכיל את כל הברושים?



פתרון. למשל



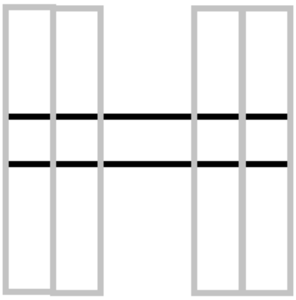
אוניברסיטת תל אביב

מדינת ישראל
משרד החינוך

ט"ו בכסלו תשע"ו 15.12.2016

אולימפיאדה רביעית ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ח'

1. נתונים שני לוחות עץ מלבניים באורך 47 ס"מ ורוחב 8 ס"מ, ועפרון. כיצד ניתן לסמן את מרכזו של כל לוח?



פתרון. נצמיד צלע קצר של לוח אחר לצלע ארוך של לוח שני, ונעביר בעפרון קו מקביל לצלע קצר של הלוח הראשון במרחק 8 סם ממנו. נצמיד לקו זה צלע ארוך של הלוח השני גם מהצד האחר, ונעביר על הלוח הראשון עוד קו מקביל במרחק 8 סנטימטרים מהקו הראשון שהעברנו (ומרחק 16 ס"מ מקצה הלוח). נעשה אותו דבר גם בצד ההפוך של הלוח הראשון. נקבל באמצע של הלוח הראשון מלבן, שיש לו אותו מרכז כמו ללוח המקורי, וצלעותיו הם 8 ו-$47-4\cdot 8=15$. אלכסון של מלבן זה קטנים יותר מ-$15+8=23$, הרי במשולש סכום שני צלעות קטן מהצלע השלישי. לכן ניתן להשתמש בצלע הארוך של הלוח הראשון בשביל אלכסונים של המלבן האמצעי. האלכסונים יחתכו במרכז המלבן, שהוא גם מרכז הלוח.

מה שהצלחנו לצייר על הלוח הראשון, נוכל לצייר גם על הלוח השני.

2. נתון חדר עם רצפה מלבנית ותקרה בגובה 3.5 מטרים. שטחו של כל אחד מהקירות לא גדול משטח הרצפה. גובה החדר כפול 5 לא גדול מאורך היקף הרצפה. מהו הוא השטח המינימאלי של רצפת החדר?

תשובה. $18\frac{3}{8}$ מ"ר.

פתרון. נגיד שהרוחב והאורך של החדר הם x ו- y מטרים. שטחי הקירות $3.5\cdot x$ ו- $3.5\cdot y$ מ"ר ושטח הרצפה שלא קטן מהם הוא xy מ"ר, ולכן $x\geq 3.5$, וגם $y\geq 3.5$. היקף הרצפה הוא $2x+2y$ וזה לא קטן מ- $5\cdot 3.5=17.5$. כלומר

$$2x+2y\geq 17\tfrac{1}{2}$$

$$x+y\geq 8\frac{3}{4}$$

ניתן לרשום $x=s-t$, $y=s+t$ כאשר s זה ממוצע של x ו- y, כלומר $s\geq 4\frac{3}{8}$. ללא הגבלת הכלליות, נניח כי $x\leq y$. אז התנאים הם $s\geq 4\frac{3}{8}$ ובנוסף $s-t\geq 3\frac{1}{2}$, $t\geq 0$.

שטח הרצפה הוא xy מ"ר, שזה $xy=(s-t)(s+t)=s^2-t^2$. לכן בהינתן s נרצה לקחת t גדול ככל האפשר שמקיים $s-t\geq 3\frac{1}{2}$, כלומר $x=s-t=3\frac{1}{2}$. אם $x=3\frac{1}{2}$ אז xy קטן ביותר מתקבל כאשר y קטן ככל האפשר, תחת התנאי $3\frac{1}{2}+y\geq 8\frac{3}{4}$, כלומר $y\geq 5\frac{1}{4}$.

במקרה $x=3\frac{1}{2}$, $y\geq 5\frac{1}{4}$ נקבל שטח $S=3\frac{1}{2}\cdot 5\frac{1}{4}=15+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}+\frac{1}{8}=15+3+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=18\frac{3}{8}$ (מ"ר).

3. אדם התחיל לעבור גשר AB מקצה A לקצה B. כאשר הוא עבר $\frac{4}{9}$ מאורך הגשר, הוא שמע צפירה של רכב המתקרב מכיוון A במהירות של 60 קמ"ש. אם הוא ימשיך ללכת קדימה, הרכב ישיג אותו בקצה B, ואם הוא יחליט לחזור אחורה, הרכב יפגוש אותו בקצה A. מהי מהירות האדם?

תשובה. $6\frac{2}{3}$ קמ"ש.

פתרון. נפצל את האיש באופן דמיוני לשני אנשים זהים: אחד ילך קדימה בהישמע הצפירה, והשני אחורה. כשכל אחד מהם יגיע לקצה הגשר, הוא יפגוש את המכונית. האיש שהולך אחורה צריך לעבור $\frac{4}{9}$ מאורך הגשר, והאיש שהולך קדימה $\frac{5}{9}$ מאורך הגשר, וזה יקרה יותר מאוחר. הבדל בין שני רגעים בהם כל איש מגיע לקצה הגשר שווה לזמן שלוקח לאיש לעבור $\frac{1}{9}$ גשר. מצד שני, מכונית פוגשת את שני האנשים ברגע הגעתם לגשר, לכן הפרש שני הרגעים שווה בדיוק לזמן שלוקח למכונית לעבור את גשר. לכן מכונית מהירה מאדם פי 9.

מהירות המכונית נתונה והיא 60 קמ"ש. מהירות האדם קטנה פי 9 והיא $60/9=20/3=6\frac{2}{3}$ קמ"ש.

4. אצל שודדי הים הארי, תום וצ'רלי התקיים דיון:

הארי: לתום יש שתי עיניים.
תום: לצ'רלי יש שתי עיניים.
צ'רלי: להארי יש שתי עיניים.
הארי: לשלושתנו יש סה"כ 2 עיניים.
תום: לשלושתנו יש סה"כ 3 עיניים.
צ'רלי: לשלושתנו יש סה"כ 4 עיניים.

התברר, שכל אחד מהם שיקר מספר פעמים ששווה לכמות העיניים שלו. כמה עיניים יש לכל אחד מהם?

פתרון. בחצי השני של הדיון נאמרו 3 אמירות סותרות, לכן לפחות 2 מהן שקריות.
בחצי הראשון של דיון גם נאמרו לפחות 2 אמירות שקריות. אכן, אם שני שודדים אמרו אמת בחצי הראשון של הדיון, אז אחד מהם סיפר על השני שיש לו שתי עיניים, כלומר השני משקר כל הזמן.

לכן נאמרו לפחות 4 אמירות שקריות, לכן יש לפחות 4 עיניים, בפרט יש שודד עם 2 עיניים שמשקר תמיד, ויש שודד אחר שאמר שיש לשודד זה 2 עיניים.

לכן גם בחלק הראשון של הדיון נאמר משפט אמיתי. מצד שני, ראינו שבחלק הראשון של הדיון נאמר רק משפט אחד אמיתי, לכן יש רק שודד אחד עם שני עיניים. לכן יש שני שודדים עם עין אחד לכל היותר.

לכן יש לכל היותר 4 עיניים בסה"כ וגם לפחות 4, כלומר יש בדיוק 4 עיניים. לכן צ'רלי אמר אמת בסוף הדיון. גם בחצי הראשון וגם בחצי השני של הדיון נאמר משפט אמיתי אחד. תום או הארי אמר אמת בחצי הראשון של הדיון. אבל זה בטח לא תום, כי אם תום אמר אמת, צ'רלי תמיד משקר, והרי צ'רלי אמר כמות נכונה של עיניים.

לכן הארי אמר אמת לגבי כמות עיניים של תום, ולכן תום שקרן, ויש לו שני עיניים, להארי ולצ'רלי יש עין אחד.

5. על הלוח רשום המספר 188188188188188. מירי מוחקת מספר ספרות, על מנת שיתקבל מספר שיתחלק ב-7. מהו המספר הגדול ביותר שיכול להתקבל?

תשובה. 888888188188

פתרון. נשים לב, כי $8-1=7$. לכן לא משנה איזה ספרות יהיו למספר, מה שקובע התחלקות ב-7 עבור מספר שמורכב מספרות 1 ו-8 זה לא סדר הספרות אלה רק הכמות.

נשתדל להבין מהם אורכים מתאימים למספר שמורכב מאחדים.

ברור כי 1 ו-11 לא מתחלקים ב-7. כך גם 111. אם נחסיר 21 מ-111 נקבל 90 וזה בטח לא מתחלק ב-7. נשים לב כי 1001 מתחלק ב-7. אכן,

$$1001=11\cdot 91=11\cdot\left(10^2-3^2\right)=11\cdot(10-3)\cdot(10+3).$$

לכן כל מספר שהוא כפולה של 1001 מתחלק ב-7. לכן $1000a+b$ מתחלק ב-7 אם ורק אם $b-a$ מתחלק ב-7 הרי הפרש של מספרים אלה הוא כפולה של 1001. אם יש מספר בעל יותר מ-3 ספרות, ניתן לרשום אותו בצורה $1000a+b$, כאשר b הוא מספר שמורכב מ-3 ספרות ימניות ו-a הוא מספר שמתקבל לאחר מחיקה של 3 ספרות ימניות, ואז להחליף אותו במספר $b-a$. אפשר להמשיך את התהליך, ולהחליף מספר ארוך $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$ שספרותיו מימין לשמאל הם a_0 , a_1, ... , a_n במספר $\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}+\overline{a_8a_7a_6}-\ldots$, שמתחלק ב-7 אח ורק אם המספר המקורי מתחלק ב-7, אבל הוא קטן בהרבה מהמספר המקורי ולכן יותר קל לבדוק האם המספר הזה מתחלק ב-7.

נשתמש בגישה זאת על מנת לבדוק מתי המספר הארוך 111...111 מתחלק ב-7.

אם כמות הספרות מתחלקת ב-6, בסכום המתחלף הכול יתקזז.

אם כמות הספרות מתחלקת היא $6k+1$ או $6k+2$ או $6k+3$, כאשר k טבעי, נקבל סכום עם מספר מחוברים שיתקזזו ומה שיישאר זה 1 או 11 או 111, וזה לא מתחלק ב-7.

אם כמות הספרות מתחלקת היא $6k+4$ או $6k+5$, כאשר k טבעי, נקבל סכום עם מספר מחוברי שיתקזזו ובסוף $111-1=110$ או $111-11=100$, וזה לא מתחלק ב-7.

לכן המקרה היחיד שמספר 111...111 מתחלק ב-7 זה כאשר האורך שלו הוא כפולה של 6. כמובן, אם מחליפים חלק מאחדים בשמיניות, זה לא משנה.

המספר המקורי שיש בשאלה הוא 188188188188188, והוא מורכב מ-15 ספרות. על מנת לקבל מספר שמתחלק ב-7, נרצה להשאיר רק 12 או 6 ספרות. מכיוון שרוצי מספר גדול ככל האפשר, נשאיר 12 ספרות. הספרות המשמעותיות הן הספרות המובילות, לכן נרצה שבצד ששמאל של המספר יהיו כמה שיותר שמיניות, לכן כדאי למחוק את 3 אחדים השמאליים ביותר.

6. על הלוח רשומים N מספרים שונים בין 1 ל-100. היחס של אף זוג מבינהם הוא לא 2 ולא 5. מה הוא הערך הגדול ביותר של N?

תשובה. 62.

פתרון. נגיד שמספר טבעי הוא **פשוט**, עם הוא לא מתחלק ב-2 ולא ב-5. מספרים פשוטים הם אלה שמסתיימים בספרה 1, 3, 7 או 9. לכן מ-1 עד 100 יש 40 מספרים פשוטים. לכל מספר פשוט מ-1 עד 100 ניתן לחשוב על כל המספרים שמתקבלים ממנו כאשר מכפילים אותו ב-2 או ב-5. נרשום את המספרים האלה בטבלה: בהתחלה רושמים מספר פשוט כלשהו, ואחר כך רושמים ליד מספר מימינו את המספר כפול 2, ומתחתיו רושמים את המספר כפול 5. נעשה את זה לכל מספר שכותבים, כל עוד המספרים המתקבלים אינם גדולים מ-100. למשל עבור 1 נקבל טבלה של 15 משבצות. אסור שירשו על

הלוח שני מספרים צמודים בטבלה, אבל אם נצבע את המשבצות כמו לוח שח, יהיה אפשר לקחת את כל המספרים מהמשבצות השחורות, שזה 8 מספרים.

1	2	4	8	16	32	64
5	10	20	40	80		
25	50	100				

מ-3 אפשר ליצור גם כזה לוח, אבל יותר קטן, ואם ניקח את המספרים של המשבצות השחורות, נקבל עוד 5 מספרים.

3	6	12	24	48	96
15	30	60			
75					

מ-5 לא ניצור כזה לוח, כי 5 כבר הופיע בלוח שנוצר מ-1. מ-7 ניצור לוח שקטן אף יותר: המספר הגדול ביותר בלוח זה הוא $7\cdot 10$, כי $7\cdot 16>100$.
אם נבחר את המשבצות השחורות, נוכל לרשום על הלוח עוד 3 מספרים. אפשר לצייר לוח כזה גם עבור 9, אבל הוא לא אבל הוא לא יהיה באותה צורה, כי גם 9 $9\cdot 10<100$, אבל $9\cdot 16>100$. לכן גם מבין המספרים שמתקבלים מ-9 על ידי כפל ב-2 או ב-5 יהיה אפשר לרשום על הלוח 3 מספרים.

7	14	28	56
35	70		

בעקרון, כל מספר הוא מכפלה של מספר פשוט עם חזקות של 2 ושל 5, לכן כל מספר שייך לאחד הטבלאות מסוג זה, שמתחיל במספר פשוט, ואסור באף לוח לקחת מספרים ממשבצות סמוכות, אבל מותר לקחת מספרים את כל המספרים מצבע מסוים של צביעת שח (כמובן, במקרה אי-זוגי ניקח את הצבע הנפוץ יותר). בינתיים ראינו שניתן לרשום מספרים $3+3+5+8$, שמתקבלים ממספרים פשוטים 1, 3, 7 ו-9. נמשיך לצייר טבלאות (הן הולכות להיות יותר ויותר קטנות).

11	22	44	88
55			

עבור 11 נקבל טבלה של 5 משבצות, שמהם מותר לקחת 3 (משבצות לבנות).
עבור 13 נקבל טבלה יותר קטנה, כי $13\cdot 8>100$. המספר הכי גדול שיהיה בטבלה הוא $13\cdot 5$. טבלה דומה תתקבל לכל המספרים הפשוטים P שמקיימים $20=\frac{100}{5}<P<\frac{100}{8}$, כלומר גם עבור 17 ו-19, כלומר 3 הם יתרמו 2 מספרים ללוח כל אחד. עבור מספרים בתחום $\frac{100}{4}<P<\frac{100}{5}$ נצטרך לוותר גם על $5\cdot P$, אבל עדיין נוכל לרשום 2 מספרים על הלוח (מהמשבצות השחורות). ובכן, כל אחד מהמספרים הפושטים מ-13 ועד 23 יכול לתרום שני מספרים, וזה 5 מספרים פשוטים.

13	26	52
65		

21	26	52

המספרים הפשוטים 27, 29, 31, 33, 37, 37, 41, 43, 47, 49 אלה מספרים שאפשר להכפיל רק ב-2 (אפילו לא ב-4), ולכן לכל מספר כזה נצטרך לבחור האם רושמים על הלוח P או 2P, כלומר רק מספר אחד. למספרים פשוטים מעל 50 הטבלא תהיה מורכבת ממשבצת אחת בלבד, כי אי-אפשר להכפיל אותם אפילו ב-2. לכן בעצם כל המספרים הפשוטים מעל 25 תורמים רק מספר אחד לרשימה על הלוח, למשל את עצמם.

נסכם: אם נרשום על הלוח 22, 44, 55 ומבין המספרים שלא מתחלקים ב-11 את המספרים שכמות הפעמים שבפירוק שלהם לגורמים ראשוניים 2 או 5 מופיעים מספר זוגי של פעמים, נקבל $3+3+3+5+8$ מספרים שהרכיב הפשוט שלהם קטן מ-15, $5\cdot 2$ מספרים שהגורם הפשוט שלהם בין 15 ל-25, ועוד $2+4\cdot 7=30$ מספרים שהגורם הפשוט שלהם גדול מ-25. בסה"כ נוכל לרשום

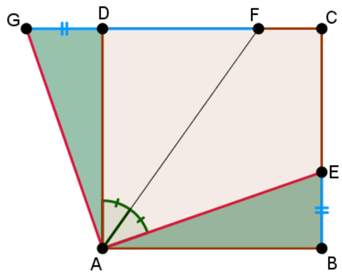
$$22+10+30=62$$

מספרים על הלוח. אבל למה אי-אפשר יותר? בשביל להוכיח את זה נפרק כל אחת מהטבלאות שקיבלנו לדומינו – מלבנים של שני משבצות:

בטבלאות עם מספר זוגי של משבצות, אנו מצליחים לחלק את הטבלה לדומינו לגמרי, בטבלאות עם מספר אי-זוגי של משבצות נשארת תמי משבצת אחת. מותר לקחת רק משבצת אחת מכל דומינו, ולכן אין מצב שניקח מטבלה מסוימת מעל חצי משבצות מעוגל כלפי מעלה. אבל אם לוקחים את הצבע הנפוץ של צביעת שח, זה בדיוק מה שקורה, כי כל דומינו מכיל משבצת אחת מכל צבע.

7. על הצלע BC של ריבוע ABCD מסמנים נקודה שרירותית E. חוצה הזווית $\measuredangle DAE$ פוגש את הצלע CD בנקודה F. מה יותר גדול: $BE+DF$ או AE?

תשובה. הם שווים.



פתרון. הרעיון הו לסובב את המשולש ABE (ירוק בציור) ב- 90° כך שנקודה B תעבור לנקודה D ונקודה E תעבור לנקודה G על המשך CD. אז במקום לדבר על $BE+DF$ נוכל לדבר על קטע DG.

כעת צריך לבדוק, איזה צלע במשולש GAF גדולה יותר: AG או FG. בעצם, נוכיח ששתי הצלעות שוות, כלומר המשולש GAF שווה-שוקיים. במקום להוכיח את שוויון הקטעים, נוכיח שוויון של זוויות:

$$\measuredangle FAG=\measuredangle FAD+\measuredangle DAG=\measuredangle EFA+\measuredangle BAE=\measuredangle BAF=\measuredangle AFG$$

וזה מסיים את ההוכחה.

8. לשני שחקנים יש לוח ריבועי משובץ וכמות גדולה של אבנים כחולות ואדומות. שני השחקנים משחקים לפי התור. בכל מהלך מותר להניח אבן בצבע כלשהו במשבצת ריקה של הלוח. המשחק מסתיים כאשר בכל משבצת יש אבן. בסוף המשחק סופרים את זוגות האבנים בצבע זהה שנמצאות במשבצות סמוכות לפי צלע. אם המספר זוגי - מנצח השחקן הראשון ואחרת - השני. לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת:

א. בלוח 7×7 ?

ב. בלוח 8×8 ?

תשובה. א. הראשון. ב. השני.

פתרון ראשון. א. ראשון בהתחלה יניח אבן בצבע האהוב עליו במרכז הלוח. לאחר מכן הוא ישחק באופן סימטרי לשני: כל פעם ששני ישים אבל במשבצת כלשהי, הראשון יניח אבן באותו צבע שהשני בחר במשבצת סימטרית ביחס למרכז הלוח. אז לכל זוג של שהו באותו צבע יש גם זוג סימטרי, לכן לא משנה איך שיחק השני, מספר הזוגות של אבנים סמוכות מאותו צבע זוגי.

ב. לפני תחילת המשחק השני יבחר שני משבצות סימטריות ביחס למרכז ליד קצה הלוח אבל לא בפינה: למשל **ב2** ו-**ז8**. למשבצות אלה הוא יקרא משבצות מיוחדות. לאחר מכן השני ישחק בצורה הבאה: כל פעם שהראשון תופס משבצת, השני יתפוס משבצת סימטרית. אם הראשון יתפוס משבצת רגילה, השני יעשה מהלך במשבצת סימטרית עם אותו צבע כמו שהראשון השתמש בו במהלך האחרון, אבל כאשר הראשון ילך למשבצת מיוחד, השני ישתמש בצבע הפוך.

ככה, בסוף המשחק, כמעט לכל זוג של אבנים סמוכים באותו צבע, יש זוג סימטרי של אבנים באותו צבע. אבל אם נסתכל על זוגות של משבצות סמוכות שכולל משבצת מיוחדת, הזוג הסימטרי הוא מכיל שני אבנים באותו צבע אך ורק כאשר זוג זה מכיל אבנים בצבעים הפוכים. לכן מבין 6 זוגות של אבנים שמכילים את המשבצות המיוחדות, רק 3 הם זוגות שסופרים אותם. הזוגות האחרים שסופרים נותנים מספר זוגי לכן הכמות הכוללת אי-זוגית.

פתרון שני. ננתח מצב לאחד שהמשחק מסתיים. נסתכל על אבן במשבצת ספציפית כלשהי וננסה להבין כיצד הייתה משתנה התוצאה של המשחק אם היינו הופכים רק את הצבע של האבן הזאת. זה היה משנה את הסוג של כל הזוגות של משבצות סמוכות שכוללים את המשבצת הנתונה (אם בזוג יש אבנים מאותו צבע, היינו מדלגים את הזוג הזה בספירה, ואם יש אבנים מצבעים שונים, היינו מוסיפים את הזוג הזה לספירה). מבחינת חשבון של זוגיות, זה לא משנה אם מוסיפים או מחסירים 1, לכן התוצאה של ספירה הייתה משתנה בכמות השכנים של המשבצת. לכן אם למשבצת יש מספר זוגי של שכנים, אז השינוי בכלל לא היה משפיע על תוצאת המשחק, ואם למשבצת יש מספר אי-זוגי של שכנים, זה פשוט היה הופך את התוצאה של משחק.

משבצות אם מספר זוגי של שכנים אלה משבצות שלא סמוכים לגבולות של הלוח, ומשבצות פינתיות. לפי מה שהוכחנו, כאשר שחקן הולך לאחת המשבצות הללו, לא משנה לו ולא ליריבו איזה צבע הוא בוחר. מצד שני, חשוב איזה צבעים יהיו במשבצות על גבולות הלוח שהן לא פינתיות, לכן נקרא להן **משבצות חשובות:** אם בסוף המשחק מחליפים את הצבע המשבצות הללו, זה מחליף את המנצח. לכן מי שיעשה מהלך אחרון במשבצות החשובות, מנצח. לכן מי שיעשה מהלך לפני אחרון במשבצות החשובות מפסיד: היריב שלו יכול לעשות מהלך במשבצות חשובה אחרונה שעוד נשארה, ולהבטיח לעצמו ניצחון.

לכן השחקנים, אם הם מספיק חכמים ורוצים לנצח, ירצו להימנע מלעשות מהלך לפני-אחרון במשבצות החשובות. לכן לפני שיעשה מהלך לפני-אחרון במשבצות חשובות יעשו את כל המהלכים במשבצות הלא-חשובות. לכן השקן המפסיד הוא זה שנאלץ לעשות מהלך כאשר נשארו רק שתי משבצות, כלומר השחקן המפסיד זה השני עבור לוח 8×8 והראשון עבור לוח 7×7.

הערה. בפתרון השני הצלחנו להבין מי יכול לנצח בלי להסביר אסטרטגיה, אבל מהשיקולים שהצגנו בפתרון השני קל להבין מה באמת צריך לעשות בשביל לנצח. אם כל המשבצות החשובות הכחולות, ונניח שגם כל המשבצות הלא-חשובות כחולות כי זה לא משנה באיזה צבע הם, קל לראות שהכול זוגי. אם נחליף צבע במספר אי-זוגי של משבצות חשובות, השני ינצח, ואם נחליף צבע במספר זוגי, הראשון מנצח. לכן מצבי ניצחון של הראשון הם המצבים בהם יש מספר זוגי של משבצות לא-פינתיות בקצוות הלוח בכל צבע. מצבי ניצחון של השני הם המצבים בהם במשבצות החשובות יש מספר אי-זוגי של מכל צבע.

בהתאם לזה השחקן שמקבל הזדמנות לעשות מהלך אחרון במשבצות חשובות (מיד אחרי שיריבו עשה מהלך לפני-אחרון במשבצות החשובות) יבחר את הזוגיות שגורמת לניצחון שלו.

אולימפיאדה רביעית ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ט'

1. אדם התחיל לעבור גשר AB מקצה A לקצה B. כאשר הוא עבר $\frac{4}{9}$ מאורך הגשר, הוא שמע צפירה של רכב המתקרב מכיוון A במהירות של 60 קמ"ש. אם הוא ימשיך ללכת קדימה, הרכב ישיג אותו בקצה B, ואם הוא יחליט לחזור אחורה, הרכב יפגוש אותו בקצה A. מהי מהירות האדם?

תשובה. $6\frac{2}{3}$ קמ"ש.

פתרון. נפצל את האיש באופן דמיוני לשני אנשים זהים: אחד ילך קדימה בהישמע הצפירה, והשני אחורה. כשכל אחד מהם יגיע לקצה הגשר, הוא יפגוש את המכונית. האיש שהולך אחורה צריך לעבור $\frac{4}{9}$ מאורך הגשר, והאיש שהולך קדימה $\frac{5}{9}$ מאורך הגשר, וזה יקרה יותר מאוחר. הבדל בין שני רגעים בהם כל איש מגיע לקצה הגשר שווה לזמן שלוקח לאיש לעבור $\frac{1}{9}$ גשר. מצד שני, מכונית פוגשת את שני האנשים ברגע הגעתם לגשר, לכן הפרש שני הרגעים שווה בדיוק לזמן שלוקח למכונית לעבור את גשר. לכן מכונית מהירה מאדם פי 9.

מהירות המכונית נתונה והיא 60 קמ"ש. מהירות האדם קטנה פי 9 והיא $60/9=20/3=6\frac{2}{3}$ קמ"ש.

2. שני מספרים 4-ספרתיים מתקבלים אחד מהשני על ידי הפיכת סדר הספרות שלהם (לדוגמה 1234 ו-4321). מכפלתם הוא מספר 8-ספרתי שמסתיים בשלושה אפסים (לדוגמה 57777000). מצאו את כל זוגות המספרים מסוג זה.

תשובה. $(5216,6125)$, $(5736,6375)$, $(5264,4625)$, $(5784,4875)$

פתרון. אף אחד מהמספרים ה-4 ספרתיים לא מסתיים ב-0, אחרת מספר הפוך היה מתחיל ב-0. לכן המספרים הנתונים לא מתחלקים ב-10. אבל מכפלתם מתחלקת ב- $10^3=2^3\cdot5^3$. לכן מספר אחד מתחלק ב- $5^3=125$ אבל לא ב-2, והשני מתחלק ב- $2^3=8$ אבל לא ב-5.

כל מספר אי-זוגי הוא מאחד מ-4 סוגים, בהתאם לשארית החלוקה של המספר ב-8:

$$8k+1, 8k+3, 8k+5, 8k+7$$

כאשר נכפיל ב-125, $8k$ יהפוך למספר שמתחלק ב-1000, לכן מה שמשפיע על 3 ספרות אחרונות של כפולת 125 זה רק הסוג של מספר. כלומר 3 ספרות אחרונות הם אפשרות אחת בין

$$125, 375, 625, 875$$

(כל מספר מתקבל מהקודם בהוספה של 250). השאלה היא, כיצד להוסיף ספרה לא אפסית להתחלה, כך שהמספר שרשום הפוך יתחלק ב-8. כמובן שזו צריכה להיות ספרה זוגית, כדי שהמספר ההפוך יתחלק ב-2, שזה משאיר לנו 4 אפשרויות לכל מקרה: 2, 4, 6 או 8. בנוסף, צריך לדרוש חלוקה ל-4. סימן החלוקה ל-4 הוא, שאם ספרה לפני אחרונה אי-זוגית הספרה אחרונה צריכה להתחלק ב-2 אך לא ב-4, ואם ספרה לפני אחרונה זוגית, אז הספרה האחרונה צריכה להתחלק ב-4. לכן אם מספר 4-ספרתי מתחיל ב-521, ספרה אחרונה צריכה להיות 2 או 6: בשני המקרים נקבל מספר שמתחלק ב-4, אבל רק אחד מהם יתחלק ב-8 (כי הפרש של שני מספרים הוא 4, לא יתכן ששניהם מתחלקים ב-8). בשביל לבדוק איזה אופציה תיתן החלקות ב-8, מספיק להתבונן ב-3 ספרות אחרונות, הרי 1000 מתחלק ב-8, לכן

ספרת האלפים לא משפיע על התחלקות. במקרה, אז צריך לבדוק האם 212 או 216 מתחלק ב-8, אבל 200 מתחלק ב-8 ולכן זה 216 (כי 16 מתחלק ב-8 ו-12 לא). מכאן הזוג הראשון הוא $(5216, 6125)$.

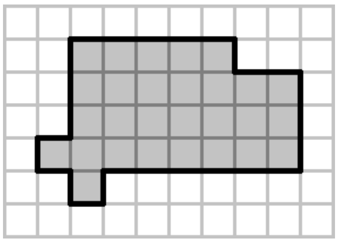
באופן דומה אפשר להוסיף ספרה לכל אחת מהשלישיות האחרות. הספרה מוגדרת תמיד ביחידות, כי הפרש בין מספרים שונים הוא קטן מ-8 ולכן רק מספר אחד מתחלק ב-8. לפי התחלקות ב-4 מנחשים מיד שזו אחת משתי ספרות, ואז בודקים).

למשל אם מספר אחד מסתיים ב-375 מספר שני מתחיל ב-573, והספרה האחרונה צריכה להיות 2 או 6, אבל 732 לא מתחלק ב-8 ו-736 כן, לכן מקבלים זוג $(5736, 6375)$.

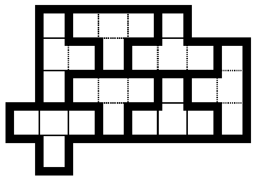
אם מספר אחד מסתיים ב-625 אז השני מתחיל ב-526, ולכן לפי התחלקות ב-4 צריך להוסיף ספרה שמתחלקת ב-4, וקל לראות ש-264 מתחלק ב-8 אבל 268 לא. לכן מקבלים זוג $(5264, 4625)$.

אם מספר אחד מסתיים ב-875 אז השני מתחיל ב-578, ולכן לפי התחלקות ב-4 צריך להוסיף ספרה שמתחלקת ב-4, וקל לראות ש-784 מתחלק ב-8 אבל 788 לא. לכן מקבלים זוג $(5784, 4875)$.

3. חלקו את הצורה שמופיעה בציור ל-7 חלקים חופפים.



פתרון.



4. על הלוח רשום המספר 188188188188188. מירי מוחקת מספר ספרות, על מנת שיתקבל מספר שיתחלק ב-7. מהו המספר הגדול ביותר שיכול להתקבל?

פתרון. נשים לב, כי $7 = 1 - 8$. לכן לא משנה איזה ספרות יהיו למספר, מה שקובע התחלקות ב-7 עבור מספר שמורכב מספרות 1 ו-8 זה לא סדר הספרות אלה רק הכמות.

נשתדל להבין מהם אורכים מתאימים למספר שמורכב מאחדים.

ברור כי 1 ו-11 לא מתחלקים ב-7. כך גם 111. אם נחסיר 21 מ-111 נקבל 90 וזה בטח לא מתחלק ב-7. נשים לב כי 1001 מתחלק ב-7. אכן,

$$1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot \left(10^2 - 3^2\right) = 11 \cdot (10 - 3) \cdot (10 + 3).$$

לכן כל מספר שהוא כפולה של 1001 מתחלק ב-7. לכן $1000a + b$ מתחלק ב-7 אם ורק אם $b - a$ מתחלק ב-7 הרי הפרש של מספרים אלה הוא כפולה של 1001. אם יש מספר בעל יותר מ-3 ספרות, ניתן לרשום אותו בצורה $1000a + b$, כאשר b הוא מספר שמורכב מ-3 ספרות ימניות ו-a הוא מספר שמתקבל לאחר מחיקה של 3 ספרות ימניות, ואז להחליף אותו במספר $b - a$. אפשר להמשיך את התהליך, ולהחליף מספר ארוך $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$ שספרותיו מימין לשמאל הם a_0, a_1, ..., a_n במספר ... $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots$, שמתחלק ב-7 אם ורק אם המספר המקורי מתחלק ב-7, אבל הוא קטן בהרבה מהמספר המקורי ולכן יותר קל לבדוק האם המספר הזה מתחלק ב-7.

נשתמש בגישה זאת על מנת לבדוק מתי המספר הארוך 111...111 מתחלק ב-7.

אם כמות הספרות מתחלקת ב-6, בסכום המתחלף הכול יתקזז.

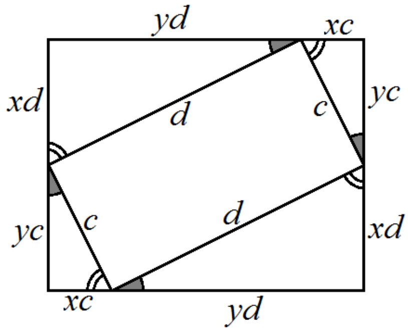
אם כמות הספרות מתחלקת היא $6k+1$ או $6k+2$ או $6k+3$, כאשר k טבעי, נקבל סכום עם מספר מחוברים שיתקזזו ומה שיישאר זה 1 או 11 או 111, וזה לא מתחלק ב-7.

אם כמות הספרות מתחלקת היא $6k+4$ או $6k+5$, כאשר k טבעי, נקבל סכום עם מספר מחוברי שיתקזזו ובסוף $111-1=110$ או $111-11=100$, וזה לא מתחלק ב-7.

לכן המקרה היחיד שמספר 111...111 מתחלק ב-7 זה כאשר האורך שלו הוא כפולה של 6. כמובן, אם מחליפים חלק מאחדים בשמיניות, זה לא משנה.

המספר המקורי שיש בשאלה הוא 188188188188188, והוא מורכב מ-15 ספרות. על מנת לקבל מספר שמתחלק ב-7, נרצה להשאיר רק 12 או 6 ספרות. מכיוון שרוצי מספר גדול ככל האפשר, נשאיר 12 ספרות. הספרות המשמעותיות הן הספרות המובילות, לכן נרצה שבצד ששמאל של המספר יהיו כמה שיותר שמיניות, לכן כדאי למחוק את 3 אחדים השמאליים ביותר.

5. על כל צלע של מלבן A נמצא קודקוד של מלבן B (שהוא לא קודקוד של A). בכל אחד משני המלבנים מחשבים את היחס בין הצלע הארוכה לצלע הקצרה. באיזה מלבן מתקבל יחס גדול יותר?



תשובה. היחס הגדול יותר במלבן B (המלבן הקטן יותר).

פתרון. נניח כי הצלע הגדולה של המלבן הפנימי היא d, והצלע הקטנה היא c. בסמוך לכל פינה של המלבן הגדול נוצר משולש ישר זווית. קל לראות שכל המשולשים האלה דומים. אם ניצבי המשולשים שיתר שלהם c הם $x\cdot c$ ו-$y\cdot c$, אז ניצבי המשולשים הדומים שיתר שלהם d הם $x\cdot d$ ו-$y\cdot d$.

אז צלעות של המשולש הגדול הם $a=xd+yc$ ו-$b=xc+yd$. אנחנו נבדוק במפורש כי $\frac{d}{c}>\frac{b}{a}$,

ובאופן דומה לחלוטין מקבלים גם ש-$\frac{d}{c}>\frac{a}{b}$.

נתון כי x,y מספרים חיוביים, וכי $d>c$. צריכים להראות $\frac{d}{c}>\frac{b}{a}$ כלומר

$$ad>bc$$
$$\left(xd+yc\right)d>\left(xc+yd\right)c$$
$$xd^2+\cancel{ycd}>xc^2+\cancel{ycd}$$

וזה ברור.

6. חשבו את הערך המספרי של הביטוי הארוך:

$$\frac{\frac{1}{1\cdot 101}+\frac{1}{2\cdot 102}+\frac{1}{3\cdot 103}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 200}-\frac{1}{201\cdot 301}-\frac{1}{202\cdot 302}-\ldots-\frac{1}{300\cdot 400}}{\frac{1}{1\cdot 400}+\frac{1}{2\cdot 399}+\frac{1}{3\cdot 398}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 301}-\frac{1}{101\cdot 300}-\frac{1}{102\cdot 299}-\ldots-\frac{1}{200\cdot 201}}$$

פתרון. קל לראות כי $\frac{100}{k(k+100)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+100}$.

לכן המונה של השבר בשאלה הוא $\frac{1}{100}$ כפול הביטוי

$$C=\left(1-\frac{1}{101}+\frac{1}{2}-\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{100}-\frac{1}{200}\right)-\left(\frac{1}{201}-\frac{1}{301}+\ldots+\frac{1}{300}-\frac{1}{400}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102}-\ldots-\frac{1}{300}+\frac{1}{301}+\ldots+\frac{1}{400}$$

נחבר את השברים בזוגות מהקצוות, כלומר ראשון אם אחרון, שני אם לפני אחרון, וכדומה, ונקבל

$$C=\frac{401}{1\cdot 400}+\frac{401}{2\cdot 399}+\ldots+\frac{401}{100\cdot 301}-\frac{401}{101\cdot 300}-\ldots-\frac{401}{200\cdot 201}$$

כלומר בדיוק 401 פעמים המחנה. לכן השבר שצריך לחשב אותו הוא

$$\frac{C/100}{C/401}=\frac{401}{100}=4.01.$$

7. לשני שחקנים יש לוח ריבועי משובץ וכמות גדולה של אבנים כחולות ואדומות. שני שחקנים משחקים לפי התור. בכל מהלך מותר להניח אבן בצבע כלשהו במשבצת ריקה של הלוח. המשחק מסתיים כאשר בכל משבצת יש אבן. בסוף המשחק סופרים את זוגות האבנים בצבע זהה שנמצאות במשבצות סמוכות לפי צלע. אם המספר זוגי - מנצח השחקן הראשון ואחרת - השני. לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת:

א. בלוח 7×7 ?

ב. בלוח 8×8 ?

תשובה. א. הראשון. ב. השני.

פתרון ראשון. א. ראשון בהתחלה יניח אבן בצבע האהוב עליו במרכז הלוח. לאחר מכן הוא ישחק באופן סימטרי לשני: כל פעם ששני ישים אבל במשבצת כלשהי, הראשון יניח אבן באותו צבע שהשני בחר במשבצת סימטרית ביחס למרכז הלוח. אז לכל זוג של שהו באותו צבע יש גם זוג סימטרי, לכן לא משנה איך שיחק השני, מספר הזוגות של אבנים סמוכות מאותו צבע זוגי.

ב. לפני תחילת המשחק השני יבחר שני משבצות סימטריות ביחס למרכז ליד קצה הלוח אבל לא בפינה: למשל **ב2** ו-**ז8**. למשבצות אלה הוא יקרא משבצות מיוחדות. לאחר מכן השני ישחק בצורה הבאה: כל פעם שהראשון תופס משבצת, השני יתפוס משבצת סימטרית. אם הראשון יתפוס משבצת רגילה, השני יעשה מהלך במשבצת סימטרית עם אותו צבע כמו שהראשון השתמש בו במהלך האחרון, אבל כאשר הראשון ילך למשבצת מיוחד, השני ישתמש בצבע הפוך.

ככה, בסוף המשחק, כמעט לכל זוג של אבנים סמוכים באותו צבע, יש זוג סימטרי של אבנים באותו צבע. אבל אם נסתכל על זוגות של משבצות סמוכות שכולל משבצת מיוחדת, הזוג הסימטרי הוא מכיל שני אבנים באותו צבע אך ורק כאשר זוג זה מכיל אבנים בצבעים הפוכים. לכן מבין 6 זוגות של אבנים שמכילים את המשבצות המיוחדות, רק 3 הם זוגות שסופרים אותם. הזוגות האחרים שסופרים נותנים מספר זוגי לכן הכמות הכוללת אי-זוגית.

פתרון שני. ננתח מצב לאחד שהמשחק מסתיים. נסתכל על אבן במשבצת ספציפית כלשהי וננסה להבין כיצד הייתה משתנה התוצאה של המשחק אם היינו הופכים רק את הצבע של האבן הזאת. זה היה משנה את הסוג של כל הזוגות של משבצות סמוכות שכוללים את המשבצת הנתונה (אם בזוג יש אבנים מאותו צבע, היינו מדלגים את הזוג הזה בספירה, ואם יש אבנים מצבעים שונים, היינו מוסיפים את הזוג הזה לספירה). מבחינת חשבון של זוגיות, זה לא משנה אם מוסיפים או מחסירים 1, לכן התוצאה של ספירה הייתה משתנה בכמות השכנים של המשבצת. לכן אם למשבצת יש מספר זוגי של שכנים, אז השינוי בכלל לא היה משפיע על תוצאת המשחק, ואם למשבצת יש מספר אי-זוגי של שכנים, זה פשוט היה הופך את התוצאה של משחק.

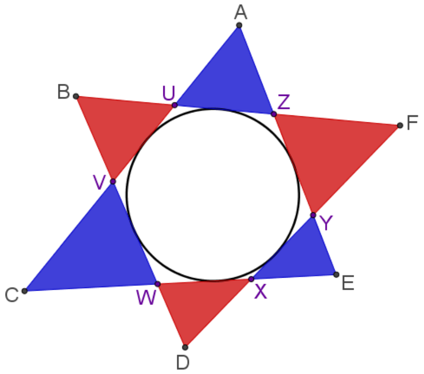
משבצות אם מספר זוגי של שכנים אלה משבצות שלא סמוכים לגבולות של הלוח, ומשבצות פינתיות. לפי מה שהוכחנו, כאשר שחקן הולך לאחת המשבצות הללו, לא משנה לו ולא ליריבו איזה צבע הוא בוחר. מצד שני, חשוב איזה צבעים יהיו במשבצות על גבולות הלוח שהן לא פינתיות, לכן נקרא להן **משבצות חשובות:** אם בסוף המשחק מחליפים את הצבע המשבצות הללו, זה מחליף את המנצח. לכן מי שיעשה מהלך אחרון במשבצות החשובות, מנצח. לכן מי שיעשה מהלך לפני אחרון במשבצות החשובות מפסיד: היריב שלו יכול לעשות מהלך במשבצות חשובה אחרונה שעוד נשארה, ולהבטיח לעצמו ניצחון.

לכן השחקנים, אם הם מספיק חכמים ורוצים לנצח, ירצו להימנע מלעשות מהלך לפני-אחרון במשבצות החשובות. לכן לפני שיעשה מהלך לפני-אחרון במשבצות חשובות יעשו את כל המהלכים במשבצות הלא-חשובות. לכן השקן המפסיד הוא זה שנאלץ לעשות מהלך כאשר נשארו רק שתי משבצות, כלומר השחקן המפסיד זה השני עבור לוח 8×8 והראשון עבור לוח 7×7.

הערה. בפתרון השני הצלחנו להבין מי יכול לנצח בלי להסביר אסטרטגיה, אבל מהשיקולים שהצגנו בפתרון השני קל להבין מה באמת צריך לעשות בשביל לנצח. אם כל המשבצות החשובות הכחולות, ונניח שגם כל המשבצות הלא-חשובות כחולות כי זה לא משנה באיזה צבע הם, קל לראות שהכול זוגי. אם נחליף צבע במספר אי-זוגי של משבצות חשובות, השני ינצח, ואם נחליף צבע במספר זוגי, הראשון מנצח. לכן מצבי ניצחון של הראשון הם המצבים בהם יש מספר זוגי של משבצות לא-פינתיות בקצוות הלוח בכל צבע. מצבי ניצחון של השני הם המצבים בהם במשבצות החשובות יש מספר אי-זוגי של מכל צבע.

בהתאם לזה השחקן שמקבל הזדמנות לעשות מהלך אחרון במשבצות חשובות (מיד אחרי שיריבו עשה מהלך לפני-אחרון במשבצות החשובות) יבחר את הזוגיות שגורמת לניצחון שלו.

8. שני משולשים חוסמים אותו מעגל. חלקים של משולש אחד שלא מכוסים על ידי המשולש השני נצבעו בכחול, וחלקים של המשולש השני שלא מוכלים במשולש הראשון נצבעו באדום. כך נוצרו 3 משולשים כחולים ו-3 משולשים אדומים. הוכיחו שאם סכום השטחים של המשולשים האדומים בציור שווה לסכום השטחים של המשולשים הכחולים, אז סכום ההיקפים של המשולשים האדומים שווה לסכום ההיקפים של המשולשים הכחולים.



פתרון. ניתן שמות לקודקודי המשולשים ולחיתוכי הצלעות שלהם כמו בציור.

קודם נשים לב שבמשושה החוסם UVWXYZ סכום של צלעות זוגיות שווה לסכום צלעות אי-זוגיות:

$$UV + WX + YZ = VW + XY + ZU \qquad (*)$$

אכן, שני משיקים למעגל מכל נקודה שווים, וכל צלע מחולק על ידי נקודת השקה לשני קטעים, והמשיקים מנקודות U, V, W, X, Y, Z יופיעו פעם אחד בכל אגף של הזהות.

נניח כי סכום המשולשים הכחולים שווה לסכום המשולשלים האדומים.

נוסיף לשני השטחים השווים את שטח המשושה UVWXYZ.

נקבל כי השטח של משולש ACE שווה לשטח של משולש BDF.

נזכר בנוסחה $S = pr$, כאשר S הוא שטח של משולש, p חצי היקף, r רדיוס המעגל החסום.

למשולשים ACE ו-BDF שטחים שווים, ורדיוס המעגל החסום זהה.

לכן היקפים שלהם שווים: $BD + DF + FB = AC + CE + EA$.

$$BV + VW + WD + DX + XY + YF + FZ + ZU + UB =$$
$$= AU + UV + VC + CW + WX + XE + EZ + ZU + UA$$

נוסיף את הזהות $(*)$ לשוויון זה ונקבל

$$BV + WD + DX + YF + FZ + UB = AU + VC + CW + XE + EZ + UA$$

נוסיף את הזהות $(*)$ שוב. נקבל את באגף שמאל של השוויון את סכום ההיקפי המשולשים האדומים ובאגף ימין את סכום ההיקפי המשולשים הכחולים.