מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל אביב

26.12.2017 ח' בטבת תשע"ח

אולימפיאדה חמישית ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ח'

1. תלמידי כיתה ח' זרקו כדורי גומי לקופסה ואחר כך ניסו לנחש כמה כדורים הצטברו שם. חמישה תלמידים ניסו לנחש: 45 , 41 , 55 , 50 , 43 , אך אף אחד לא ניחש בדיוק את הכמות. הניחושים נבדלו מהאמת ב- 3 , 7 , 5 , 7 ו-2 כדורים (לא בהכרח באותו הסדר כמו הניחושים). כמה כדורים היו בקופסה?

תשובה. 48.

פתרון. אם המספר הוא x הניחושים הכי רחוקים ממנו הם $x+7$ ו- $x-7$. אלה הניחוש הגדול ביותר והקטן ביותר, כלומר 55 ו-41. לכן x הוא הממוצע שלהם, $x=48$.

2. על הלוח כתובים כל המספרים מ-1 עד 10^9 (כולל 10^9). המספרים שמתחלקים ב-3 כתובים באדום, ושאר המספרים – בכחול. סכום של כל המספרים האדומים שווה ל- X, וסכום של כל המספרים הכחולים שווה ל- Y. איזה מספר גדול יותר, $2X$ או Y, ובכמה?

תשובה. Y גדול ב-1.

פתרון. כל מספר אדום נמצא בין שני מספרים כחולים שהוא הממוצע שלהם. כך למשל, 3 נמצא בין 2 ל-4, 6 נמצא בין 5 ל-7, 999999999 נמצא בין 1000000000 ל-999999998. לכן אם נחסיר את $2X$ מסכום המספרים הכחולים, הכול מתקזז ונשאר 1.

3. בפארק יש 3 שבילים ישרים שיוצרים משולש (אין שבילים נוספים). הכניסות לפארק הן באמצעי השבילים, ובכל קודקוד של המשולש תלוי פנס. מכל כניסה מדדו את מרחק ההליכה הקצר ביותר, לאורך שבילי הפארק, עד הפנס בפינה הנגדית. התברר כי 2 מבין 3 המרחקים שווים זה לזה. האם המשולש בהכרח שווה-שוקיים?

תשובה. לא בהכרח.

פתרון. נניח שהצלע הקטנה ביותר במשולש היא a, צלע נוספת b, והצלע הגדולה ביותר היא c, כלומר $a<b<c$. הדרך מאמצע a לפנס הנגדי היא בכיוון אחת $\frac{a}{2}+b$ ובכיוון אחר $\frac{a}{2}+c$, אבל ברור ש-$\frac{a}{2}+b$ קצרה יותר. הדרך הקצרה מאמצע b לפנס הנגדי היא $\frac{b}{2}+a$, ומאמצע c לפנס הנגדי

היא $a+\frac{c}{2}$. אפשר לראות כי $a+\frac{b}{2}$ קצר יותר מהאחרים, אבל זה גם לא חשוב; מה שפותר את השאלה זה האפשרות ש-$b+\frac{a}{2}$ עלול להיות שווה $a+\frac{c}{2}$.

אכן על מנת שיהיה $a+\frac{c}{2}=b+\frac{a}{2}$ מה שצריך זה $a+2b=c+2a$ כלומר $2b=c+a$, כלומר $b=\frac{a+c}{2}$. זה אפשרי, למשל כאשר, יש משולשים בעלי צלעות שונות כך שאורך הצלע האמצעית שווה לממוצע של שני הצלעות האחרות (למשל המשולש שצלעותיו 3, 4, 5).

4. בתרגיל אותיות זהות מסמנות ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות, כוכביות מסמנות ספרות כלשהן. מצאו את כל הספרות.

$$\overline{\text{מעגל}}^{\,2}=\overline{\text{מע**גל}}$$

פתרון. נסמן את המספר בדו-ספרתי **מע** ב-x. אז $x^2=x+100\cdot k$, במילים אחרות $x(x-1)$ מתחלק ב-100, כלומר ב-4 וב-25.

כלומר x או $x-1$ מתחלק ב-25, כמו כן x או $x-1$ מתחלק ב-100.

המספרים שקטנים מ-100 ומתחלקים ב-25 הם 0, 25, 50 ו-75. ליד 50 אין מספר שמתחלק ב-4, וגם הוא לא מתחלק ב-4. 0 זאת אופציה לא מוצלחת, כי **מ**,**ע** הן שתי ספרות שונות ולא 00. יתכן כי 00 הוא $x-1$ כלומר **מע** = 01. אפשרות אחרת היא ש-$x=25$ ואז $x-1=24$, ואפשרות שלישית היא ש-$x=76$ ו-$x-1=75$.

כעת ננתח את הספרות המובילות. אם הספרה המובילה **ל** היא 4 או יותר, אז מקבלים שריבוע הוא 8-ספרתי ולא 7-ספרתי, הרי אפילו 4000^2 הוא 16000000.

אם הספרה המובילה היא 3, אפשרי לקבל שהריבוע הוא 7-ספרתי, אבל הספרה המובילה היא 9, הרי $3000^2=9000000$. אבל צריך שלריבוע ולמספר עצמו תהיה אותה ספרה מובילה.

באופן דומה, אם הספרה המובילה היא 2, הספרה המובילה של הריבוע היא לפחות 4, בניגוד להנחה שזו אותה ספרה.

לכן הספרה המובילה היא 1. לכן הספרה האחרונה היא לא 1. זה משאיר שתי אפשרויות בלבד לשתי ספרות אחרונות: 76 ו-25.

נשים לב כי הריבוע של **מעגל** כאשר **ל** = 1 הוא 1000000 ועוד **ג**·200000 ועוד מחוברים, לכן הספרה השנייה משמאל היא לפחות פי 2 יותר גדולה מאשר **ג** (לא יכולה להיות גרירה לספרת המיליונים כי הספרה המובילה היא 1). אבל מצד שני הספרה השנייה משמאל היא **ג**, כלומר פעמיים **ג** זה לא יותר מאשר **ג**, לכן **ג** הוא 0.

לכן נשארו שתי אפשרויות בלבד למספר 4-ספרתי: 1025 או 1076. נשים לב כי $(1000+x)^2=10^6+2000\cdot x+x^2$. אנו רוצים שספרה שנייה משמאל תישאר 0, לכן $2x<100$, כאשר x הוא המספר הדו-ספרתי **מע**. לכן הוא לא 76, אלה 25.

נבדוק שזה אפשרי: $1025^2=10^6+2000\cdot 25+25^2=10^6+50000+625=1050625$.

5. נתונות מספר קופסאות כבדות שאפשר להסיע אותן באמצעות 7 משאיות עם קיבולת של 6 טון כל אחת, אבל אי-אפשר להסיען באמצעות 6 משאיות מסוג זה.

א. האם ייתכן שאפשר להסיע אותן ב-3 משאיות שקיבולת של כל אחת היא 7 טון?

ב. האם ייתכן שאפשר להסיע אותן ב-3 משאיות שקיבולת של כל אחת היא 10 טון?

תשובות. א. לא. ב. כן.

א. פתרון ראשון. המשקל הכולל על כל שתי משאיות של 6 טון הוא מעל 6 טון, אחרת היה אפשר להחליף אותן במשאית אחת. לכן רק על משאית אחת יכול להיות פחות מ-3 טון. עם ניקח משאית זאת יחד עם עוד משאית, זה מעל 6 טון, כל אחת מ-5 המשאיות האחרות מובילה מעל 3 טון, לכן המשקל הכולל הוא מעל 21 טון. לכן 3 משאיות של 7 טון לא מספיקות.

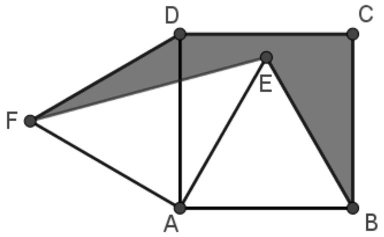
פתרון שני. נניח שניתן להעביר את כל הקופסאות ל-3 משאיות של 7 טון. אנו נוכיח, שאפשר להעביר כל מה שיש על משאית של 7 טון לשתי משאיות של 6 טון. מזה נקבל, שגם מלכתחילה היה אפשר להסתפק ב-6 משאיות ולא היה צריך 7 משאיות.

אכן, נסתכל על הקופסה הכבדה ביותר שנמצאת על המשאית של 7 טון. היא קטנה מ-6 טון, כי מקודם הצליחו להעמיס את הכול למשאיות של 6 טון. אם הי גדולה מ-1 ט', אז אפשר לשים אותה על משאית אחת של 6 טון ואת כל היתר על משאית אחרת של 6 טון.

אם כל הקופסאות על המשאית של 6 טון קטנות יותר מאשר 1 ט', פשוט נעביר אותן למשאית של 6 טון עד שאי-אפשר יותר. כאשר לא מצליחים להעביר עוד קופסאות, המשאית של 6 טון כמעט מלאה (נשאר פחות מ-1 ט' מקום פנוי), לכן מה שאפשר אפשר להכניס למשאית שנייה של 6 טון.

ובכן, בכל מקרה אפשר להחליף משאית של 7 טון בשתי משאיות של 6 טון.

ב. יתכן שהיו 7 קופסאות של 3.1 טון, וכל קופסה דרשה משאית משלה. אבל במשאית של 10 טון אפשר לשים גם 3 קופסאות, לכן 3 משאיות זה מספיק.



6. בתוך ריבוע ABCD שאורך צלעו 1 סומנה נקודה E, ומחוץ לריבוע נקודה F, כך שהמשולשים ABE ו-DAF משוכללים. חשבו את השטח של המחומש CBEFD.

תשובה. $\frac{1}{2}$.

פתרון. משולש AFE חופף למשולש ABD, ולכן שטחו $\frac{1}{2}$. אכן, סיבוב ב- 60° סביב A מעביר משולש AFE למשולש ABD.

נוסיף לשטח האפור את המשולשים AFE ו-ABE, ולאחר מכן נוריד את המשולש DAF. הקבל ריבוע ABCD ששטחו 1. הוספנו והורדנו משולשים משוכללים זהים, שזה מתקזז, אבל הוספנו גם משולש AFE ששטחו $\frac{1}{2}$, וקיבלנו שטח 1. לכן בהתחלה השטח היה $\frac{1}{2}$.

7. מצאו את המספר הטבעי הגדול ביותר, שכל ספרותיו שונות זו מזו, ואם מסתכלים על כל 3 ספרות רצופות מקבלים מספר שמתחלק ב-13.

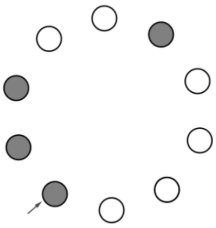
תשובה. 975468

פתרון. נתבונן במספר 4-ספרתי $\overline{abcd}$ שכל רצף של 3 בו מתחלק ב-13. זאת אומרת שגם $x=\overline{abc}$ וגם $y=\overline{bcd}$ מתחלקים ב-13. לכן גם $10x-y=1000\cdot a-d$ מתחלק ב-13. אבל גם 1001 מתחלק ב-13, לכן גם $1001\cdot a$ מתחלק ב-13.

לכן גם $1001\cdot a-(1000\cdot a-d)=a+d$ מתחלק ב-13. אבל $a+d$ בוודאי חיובי וקטן מ-20, לכן $a+d=13$.

דבר כזה נוכל להגיד על כל שתי ספרות במרחק 3 זו מזו במספר שאנו מנסים לבנות. יש 3 דרכים לרשום את 13 כסכום של שתי ספרות: $9+4$, $8+5$, $7+6$. ספרות יותר קטנות 0, 1, 2, 3 לא יכולות בסכום עם עוד ספרה לתת 13, לכן אם יש ספרה קטנה במספר שלנו, אז גם לפניה וגם אחריה יכולים להיות רק 2 ספרות, ובסה"כ יכולים להיות רק 5 ספרות.

לכן אם נרצה לעשות מספר 6-ספרתי, נצטרך שגם להישתמש רק בספרות 4, 5, 6, 7, 8, 9, ובמרחק 3 מכל ספרה צריכה להיות ספרה שמשלימה אותה ל-13. כמובן שמספר יהיה הכי גדול אם נצליח לעשות שיתחיל מ-9. נחפש מספר תלת ספרתי שמתחיל ב-9 בשביל הרצף המוביל של המספר שלנו. $7\cdot 13=91$, לכן מספר 910 יכול היה להתאים אם לא היו בו ספרות קטנות. מספר דו-ספרתי שנרצה להצמיד ל-9 על מנת לקבל מספר תלת-ספרתי הוא לפחות 45, אבל לכל היותר 87, לכן המספרים 923, 936 עדיין קטנים מדי, אז זה 949 (שזה גרוע כי 9 מופיע פעמיים) או 962 (שזה גרוע כי יש 2), או 975 או 988 (שזה כי 8 מופיע פעמיים).
כלומר האפשרות היחידה היא 975.
נשים לב כי היינו יכולים לרשום את החישובים שעשינו בתחילת הפתרון בסדר הפוך ולקבל מסקנה שאם $\overline{abc}$ מתחלק ב-13 ו-$a+d=13$ אז גם $\overline{bcd}$ מתחלק ב-13.
מכאן אם 975 מתחלק ב-13, אז גם 754, ולכן גם 546, וגם 468. לכן 975468 הוא מספר שמקיים את כל התנאים, והוא מספר שש-ספרתי יחיד מסוג זה שמתחיל ב-9.



8. במעגל נמצאות 5778 נורות כבויות במרחקים קבועים. מתחת לכל נורה יש כפתור. כאשר לוחצים על הכפתור, זה משנה מצב של 4 נורות: הנורה שליד הכפתור, שתי נורות הבאות במעגל עם כיוון השעון, ואת הנורה הנגדית לכפתור (נורה כבויה נדלקת כאשר משנים את מצבה, ונורה דולקת נכבית). מהי הכמות המרבית של נורות שאפשר להדליק בו-זמנית?

תשובה. 5776.

פתרון. נלחץ על שני כפתורים מנוגדים. שתי הנורות המנוגדות הסמוכות לכפתורים ישנו את מצבם פעמיים, כלומר יישארו כמו שהם. לכן מה שישתנה זה שני וזוגות מנוגדות של נורות.
בשיטה הזאת נוכל להדליק כמה זוגות רצופים: נדליק זוג מסוים למשל נורות 1 ו-2 והזוג נגדי, נדליק גם נורות 3 ו-4 וגם זוג נגדי, לאחר מכן זוג 5 ו-6, זוג 7 ו-8, וכך הלאה, עד שנדליק כמעת חצי מהמעגל, ובמקביל יידלק גם החצי השני.
המספר 5778 לא מתחלק ב-4, לכן מחצית ממנו זה מספר אי-זוגי, לכן עם נדליק זוגות לא נוכל להדליק בדיוק חצי מעגל. לכן בעצם אנחנו נדליק חצי-מעגל חוץ מנורה אחרונה, וגם מצד שני תישאר נורה לא דלוקה.
כך נוכל להדליק 5776 נורות (כל המעגל חוץ מ-2 נורות).

האם אפשר יותר? נחלק את כל הנורות לשני סוגים: זוגיות ואי-זוגיות. כאשר לוחצים על כפתור, משנים את המצב של שתי נורות נגדיות שהן מסוגים שונים, וגם שתי נורות עם כיוון השעון שהן מסוגים שונים, כלומר משנים מצב של שתי נורות זוגיות ושל שתי נורות זוגיות.
כשמשנים מצב של נורה זוגית, אז כמות הנורות הזוגיות משתנה ב-1. כשמשנים מצב של שתי נורות זוגיות, אז כמות הנורות הזוגיות הדלוקות משתנה ב-2 או לא משתנה. בהתחלה יש 0 נורות זוגיות דלוקות, לכן בכל שלב של משחק יש מספר זוגי של נורות זוגיות דלוקות.
לכן אי-אפשר להדליק את כל הנורות הזוגיות. באופן דומה אי-אפשר להדליק את כל הנורות האי-זוגיות. לכן לא משנה מה נעשה, תמיד יהיו 2 נורות לא דלוקות.

26.12.2017 ח' בטבת תשע"ח

אולימפיאדה חמישית ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ט'

1. לאיילה, בתיה, וגדי היו סוכריות. איילה נתנה חצי מהסוכריות שהיו לה לבתיה. לאחר מכן, בתיה נתנה שליש מהסוכריות שלה לגדי. לבסוף, גדי נתן רבע מהסוכריות שהיו לו לאיילה. בסופו של דבר, התברר שלכולם יש אותה כמות של סוכריות. מהי הכמות הקטנה ביותר של סוכריות שהייתה יכולה להיות לכל אחד מהילדים בהתחלה?

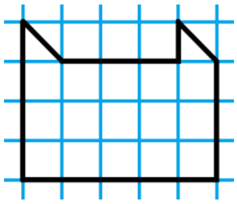
פתרון. נניח שבסוף המשחק לכל אחד יש N סוכריות. מהלך אחד קודם גדי נתן רבע מהסוכריות לאיילה, לכן היו לגדי $\frac{4}{3}N$ סוכריות ולאיילה היו רק $\frac{2}{3}N$. לפני זה בתיה נתנה שליש מהסוכריות שלה לגדי, כלומר היו לה $\frac{3}{2}N$ סוכריות, והיא העבירה לגדי $\frac{N}{2}$, לכן לפני זה היו לגדי $\frac{4}{3}N-\frac{N}{2}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)N=\frac{5}{6}N$. לפני איילה נתנה חצי מהסוכריות שהיו לה לבתיה, כלומר היה לה $\frac{4}{3}N$ סוכריות ולבתיה היו $\frac{3}{2}N-\frac{2}{3}N=\frac{5}{6}N$ סוכריות.

כל המספרים שהופיעו במהלך המשחק בהכרח שלמים, לכן הכרחי ומספיק ש- N יתחלק ב-6. לכן N הקטן ביותר הוא 6.

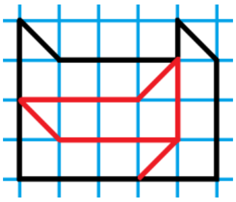
נבדוק שזה אפשרי. לפי חישובים שלנו, לאיילה יש בהתחלה $\frac{4}{3}N=8$, לבתיה $\frac{5}{6}N=5$, וגם לגדי $\frac{5}{6}N=5$. במהלך ראשון איילה נותנת 4 סוכריות לבתיה, ונשארות לה 4 סוכריות ולבתיה 9. אחרי זה בתיה נותנת לגדי 3 סוכריות, ונשארות לה 6 סוכריות, ולגדי 8. אחרי זה גדי נותן 2 סוכריות לאיילה ומתקבל שוויון.

2. חלקו את הצורה בציור ל-4 חלקים חופפים.

(צורות הן חופפות אם הן מתקבלות אחת מהשנייה על ידי סיבוב ו/או שיקוף).



פתרון:



3. נתונים p,q מספרים שלמים. אי-השוויון $x^2+px+q>0$ מתקיים לכל x שלם. האם בהכרח אי-שוויון זה מתקיים לכל x ממשי?

מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל אביב

פתרון. קל לראות כי $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, לכן ה-$x$ בו מתקבל הערך המינימלי הוא $x_0=-\frac{p}{2}$. אם p מספר זוגי, אז ה-x_0 הזה הוא שלם, ואז המספר הוא חיובי לפי נתון.

אם p אי-זוגי, אז x_0 הוא חצי-שלם. אבל אם נציב $x_1=x_0+\frac{1}{2}$, זה כבר מספר שלם, לכן לפי נתון $x_1^2+px_1+q\ge 1$, לכן $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=x_1^2+px_1+q\ge 1$.

לכן $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\ge q-\frac{p^2}{4}\ge\frac{3}{4}$.

```
        ג ו ש
  ___________
 _ג ג ש מ מ ש|ש ש ש
   * * *
   -----
   * * * *
  _* * * *
   -------
     * * *
    _* * *
     -----
         0
```

4. אותיות זהות מסמנות ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות, כוכביות מסמנות ספרות כלשהן. מצאו את כל הספרות.

פתרון. נשים לב כי **שממשגג** מתחלק ב-11. אכן, אם נכפיל את 11 ב-0000**ג** ונחסיר, יתקבל **שממש**, אם נכפיל 11 ב-N0,כאשר N מסמן **מ** – **ש**, נקבל **ששש**, וזה בדיוק 11 כפול **ש**0**ש**. (היה אפשר גם להסיק את זה גם מסימן החלוקה ב-11: סכום ספרות זוגיות פחות סכום ספרות אי-זוגיות מתחלק ב-11).

מצד שני, **ששש** לא מתחלק ב-11, הרי זה **ש** כפול 111 ששניהם לא מתחלקים ב-11. אבל **ששש** כפול **גוש** כן מתחלק ב-11, לכן **גוש.**

נשים לב שכאשר מחסירים מהמספר 4-ספרתי **משגג** מספר תלת ספרתי, מקבלים מספר תלת-ספרתי, לכן הספרה המובילה **ג** שווה ל-1. כאשר מכפילים שני מספרים תלת-ספרתיים שמתחילים ב-**ש**, מקבלים מספר 6-ספרתי **שממש**11, לכן **ש** קטן מ-4, הרי אפילו 400^2 זה כבר 160000 וזה יותר מדי. מצג שני, 300^2 זה מספר 5-ספרתי, לכן **ש** הוא לפחות 3. לכן **ש** = 3.

```
        3 4 1
  ___________
 _1 1 3 5 5 3|3 3 3
   9 9 9
   -----
  _1 3 6 5
   1 3 3 2
   -------
    _3 3 3
     3 3 3
     -----
         0
```

לכן **גוש** = 3**ו**1 מתחלק ב-11, ומכאן קל למצוא כי **ו** = 4. כעת אנחנו יודעים את שני הגורמים, מכאן ניתן לקבל את המכפלה ואת כל הכוכביות. קל לעשות את זה כאשר מתקדמים מלמטה למעלה.

5. נתונות מספר קופסאות כבדות שאפשר להסיע אותן באמצעות 7 משאיות עם קיבולת של 6 טון כל אחת, אבל אי-אפשר להסיען באמצעות 6 משאיות מסוג זה.

א. האם ייתכן שאפשר להסיע אותן ב-3 משאיות שקיבולת של כל אחת היא 7 טון?

ב. עבור אילו ערכי x ייתכן שאפשר להסיע אותן ב-3 משאיות שקיבולת של כל אחת היא x טון?

תשובות. א. לא. ב. עבור $x > 9$.

פתרון. נניח שהמשאית החדשות מכילות מעל 9 טון, נגיד $9 + x$. ניקח y עבורו $x = 3y$. נניח שכל קופסה שוקלת $3 + y$. אז כל קופסה הייתה צריכה משאית נפרדת של 6 טון, ולכן עבור 7 קופסאות מסוג זה היה צריך 7 משאיות של 6 טון. אבל על משאית גדולה יותר של $9 + x$ טון ניתן להעמיס 3 קופסאות מסוג זה, לכן אפשר להעביר את הכול באמצעות 3 משאיות גדולות.

כעת נניח שהקיבולת של משאיות חדשות זה 9 טון או פחות, ונניח שאפשר להעמיס את כל הקופסאות שיש על 3 משאיות. אנחנו נוכיח שאפשר להחליף כל משאית חדשה בשתי משאיות של 6 טון, ולכן 7 משאיות של 6 טון לא היו נחוצות.
אכן, ניקח משאית של 9 טון. עליה נמצאות קופסאות של לא יותר מאשר 6 טון (כי העברנו את כל הקופסאות על משאיות של 6 טון). אם יש קופסה של 3 טון או יותר, נוכל להניח אותה על משאית קטנה, ואת כל הקופסאות האחרות על משאית קטנה אחרת.
אם לא, אז פשוט נעביר קופסאות ממשאית גדולה למשאית קטנה עד שאי-אפשר יותר. אם נצטרך לעצור, על המשאית הקטנה אי-אפשר להעמיס 3 טון נוספים, כי כל הקופסאות שלנו קטנות מ-3 טון. לכן יש עליה לפחות 3 טון. לכן נשאר במשאית הגדולה לא יותר מאשר 6 טון, ולכן ניתן להעביר כל מה שיש עליה למשאית קטנה נוספת.

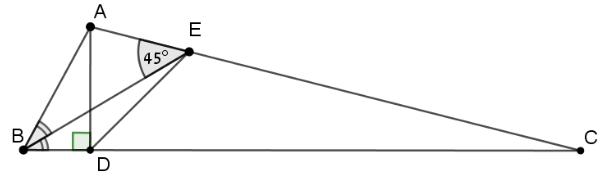
6. נתון לוח משבצות 100×100. כל משבצת היא שחורה או לבנה. בכל משבצת לבנה כותבים את כמות המשבצות השחורות באותה שורה, ובכל משבצת שחורה רושמים את כמות המשבצות הלבנות באותה עמודה. האם סכום כל המספרים בלוח זוגי או אי-זוגי?

תשובה. זוגי.

פתרון. נגיד שבשורה מספר i יש a_i משבצות שחורות באותה שורה. אז באותה שורה יש $100 - i$ משבצות שחורות, וסכום המספרים שרשומים בשורות שחורות באותה השורה הוא $a_i\left(100 - a_i\right)$. מספר זה זוגי אם a_i זוגי, והוא אי-זוגי אם a_i אי-זוגי. לכן מבחינת זוגיות סכום כל המספרים במשבצות השחורות זה כמו $a_1 + a_2 + ... + a_{100}$, כלומר בדיוק שווה לכמות הכוללת של המשבצות הלבנות.

באופן דומה לחלוטין מוכיחיו שסכום המספרים שרשומים במשבצות הלבנות זהה מבחינת הזוגיות לכמות הכוללת של המשבצות השחורות.

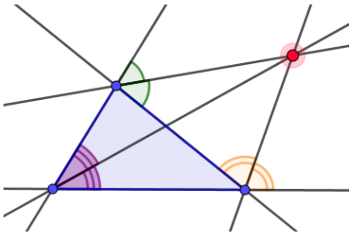
לכן סכום כל המספרים בטבלה זהה מבחינת זוגיות לכמות המשבצות שזה 100^2 שזה זוגי.



7. במשולש ABC שבו AD הוא גובה, BE חוצה זווית, $\measuredangle AEB = 45^\circ$. מצאו את $\measuredangle ADE$.

תשובה. 45°.

פתרון. נזכיר שבמשולש כלשהו יש חוצי-זוויות משני סוגים: חוצה זווית פנימי וחוצה זווית חיצוני. חוצה זווית זהה קו שעובר דרך קודקוד ויוצר זווית זהה אם שתי הצלעות בקודקוד זה. חוצה זווית פנימי נמצא בין הצלעות, חוצה זווית חיצוני נמצא לגמרי מחוץ למשולש (ומאונך לחוצה זווית פנימי). חוצי זווית מקודקודים שונים נפגשים בנקודה: למשל 3 חוצי זוויות פנימיים מקודקודים שונים. הדוגמה האחרת זה שני חוצי זווית חיצוניים משני קודקודים שונים, וחוצה זווית פנימי מקודקוד אחר. הסיבה היא שנקודות על חוצה זווית נמצאות במרחק שווה משתי צלעות, וכאשר נחתכים שני חוצי זוויות מקודקודים שונים, מתקבלת נקודה שנמצאת במרחק שווה מכל 3 הצלעות, ולכן היא נמצאת גם על חוצה זווית מקודקוד נוסף.



בשאלה שלנו, נתבונן במשולש ישר זווית BAD. חוצה זווית פנימי של B הוא BE. אם נוכיח כי AE הוא חוצה זווית חיצוני שלו, אז גם DE, ואז נדע שהישר DE יוצר זוויות של 45° אם הקווים AD ו-BD, הרי הזווית BD ישרה. אז מספיק להוכיח כי הזווית בין AE ל-AD שווה לזווית בין ההמשך של AE ל-AB.

אם נסמן במשולש ABC זווית A ב- α, זווית B ב- β, זווית C ב- γ, אז נוכל לבטא את הזוויות שאנחנו רוצים למצוא. זווית בין ההמשך של AE ל-AB היא $180^\circ - \alpha$, כי זו גם זווית חיצונית של משולש ABC.

הזווית DAE היא זווית במשולש ישר זווית DAC, בה D זווית ישרה, לכן היא $90^\circ - \gamma$. ובכן, מטרתנו היא להראות ש- $180^\circ - \alpha = 90^\circ - \gamma$, במילים אחרות $\alpha - \gamma = 90^\circ$.

משפט על סכום זוויות במשולש BAE נותן לנו זהות $\alpha + \dfrac{\beta}{2} + 45^\circ = 180^\circ$.

במשולש BEC, סכום של זוויות פנימיות ב-B וב-C שווה לזווית חיצונית, ולכן $\gamma + \dfrac{\beta}{2} = 45^\circ$.

נחסיר בין שתי זהויות האחרונות ונקבל $\alpha - \gamma + 45^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, לכן $\alpha - \gamma = 180^\circ - 90^\circ$, וזה בדיוק מה שהיה חסר.

8. אלון, בני, גיא ודור עבדו ביחד על מסמך שאורכו 100 שורות. המסמך נמצא באינטרנט, וכל אחד מהם יכול להיכנס ולערוך אותו. הם הסכימו שכל אחד מהם יכנס למסמך ויעבוד עליו, פעם אחת ביום ראשון ופעם אחת ביום שני, אך לא ידוע באילו שעות הם עבדו על המסמך בכל יום. ידוע גם שכל ילד נכנס למסמך רק פעם אחת ביום, ונעל את הקובץ כך שאחרים לא יכולים לערוך בזמן שהוא עורך. כמו כן, ידוע שבסוף יום ראשון המסמך כלל 50 שורות, ובסוף יום שני המסמך כלל 100 שורות. הנה ההיגדים של כל אחד מהם:

אלון: *ביום ראשון הכפלתי את כמות השורות במסמך פי 2, ואז כתבתי 5 שורות נוספות. ביום שני כתבתי 40 שורות.*

בני: *ביום ראשון הכפלתי את כמות השורות במסמך פי 3, ואז כתבתי 5 שורות נוספות. ביום שני כתבתי 10 שורות.*

גיא: *ביום ראשון הכפלתי את כמות השורות במסמך פי 4, ואז כתבתי 15 שורות נוספות. ביום שני מחקתי חצי מהשורות במסמך, ואז כתבתי 25 שורות.*

דור: *ביום ראשון הכפלתי את כמות השורות במסמך פי 2, ואז מחקתי 20 שורות. ביום שני מחקתי 20% מהשורות במסמך, ואז כתבתי 30 שורות.*

לאחר כמה ימים, הם גילו שאחד מהם שיקר, ולמעשה לא נכנס למסמך אף פעם. כל השאר אמרו אמת בכל ההיגדים שלהם. מיהו השקרן מבין הארבעה?

פתרון. נוח לארגן את הנתונים בטבלה.

	יום א	יום ב
אבי	$\times 2$ $+5$	$+40$
בני	$\times 3$ $+5$	$+10$
גדי	$\times 4$ $+15$	$/2$ $+25$
דני	$\times 2$ -20	$\times 0.8$ $+30$

ביום שני, גדי יכול רק לקצר את כמות השורות (אם יש יותר מ-50 שורות, ואם יש פחות אז יישאר פחות גם אחריו). לכן על מנת להגיע ביום שני מ-50 ל-100 צריכים את אבי (כי דני מוסיף פחות מ-30 שורות, בני 10, וגדי לא מוסיף). לכן אבי לא שקרן.

נגיד שגדי שקרן. אז ביום שני אבי מוסיף 40 שורות, בני 10 שורות וזה גבר מעלה את כמות השורות ב-50. לכן דני לא מוסיף כלום, כלומר כאשר הוא מוחק 20% ואז מוסיף 30 זה צריך להתקזז. אבל כאשר הוא מגיע לערוך את המוסמך, יש 100 שורות לכל היותר, לכן הוא מוחק לא יותר מאשר 20 שורות, לכן הוא מגדיל את כמות השורות.

לכן גדי לא שקרן. כעת נניח שדני שקרן.
נסתכל על מה שקורה ביום ראשון. המספר בסוף היום הוא זוגי (50), לכן אבי וגדי הם לא אלה שמסיימים את העריכה (הרי כאשר מכפילים ב-2 או ב-4 ומוסיפים מספר אי-זוגי מקבלים מספר אי-זוגי). לכן האחרון שערך את המסמך ביום ראשון הוא בני. לפני שהוא ניגש לערוך אותו צריכים להיות 15 שורות בדיוק (כי לאחר כפל ב-3 והוספת 5 צריכים לקבל 50). אבל גדי בעצמו כתב 15 שורות, ואבי עוד הוסיף (לא משנה באיזה סדר הם), ולכן כאשר בני ניגש לערוך מסמך כבר יש יותר מ-15 שורות, וזה הלא יתכן.
לכן אבי, גדי ודני אינם שקרנים.

לכן בני הוא השקרן. בשביל שלמות הפתרון, כדאי לוודא שזה אפשרי. יתכן שביום ראשון אבי התחיל (וכתב 5 שורות), גדי המשיך (והפך את זה קודם ל-20, ואז ל-35 שורות), ואז דני הפך את זה ל-70 ומחק 20, אז בסוף היום היו בדיוק 50. ביום שני הם היו יכולים לעשות בסדר הפוך דני התחיל, הפך 50 ל-40 ואז הוסיף 30, ואז היו 70 שורות. לאחר מכן גדי מחק חצי ונשארו 35 שורות, אבל הוא הוסיף גם 25 ואז היו 60 שורות. בסוף בא אבי, הוסיף 40 שורות ואז בקובץ היו 100 שורות.