מדינת ישראל
משרד החינוך
י' בטבת תשע"ו

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY
22.12.2015

אולימפיאדה שנייה ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ז'

יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תתקבל.

1. נתונה טבלת מספרים 3×3. כל מספר בטבלה שלא נמצא בעמודה הימנית ביותר, גדול פי 2 בדיוק מהמספר שרשום סמוך אליו מצד ימין. כל מספר שלא נמצא בשורה העליונה, גדול פי 3 בדיוק מהמספר שרשום מעליו. מצאו את המספר שרשום במשבצת המרכזית, בהנחה שסכום המספרים בטבלה הוא 182.

$4a$	$2a$	a
$4\cdot 3a$	$2\cdot 3a$	$3a$
$4\cdot 9a$	$2\cdot 9a$	$9a$

תשובה. 12

פתרון. את כל המספרים בטבלה אפשר לבטא באמצעות המספר בפינה ימנית עליונה שנסמן אותו ב-a. סכום כל המספרים הוא $(9+3+1)(4+2+1)a$: כאשר פותחים סוגריים, המחוברים הם בדיוק מספרי הטבלה. לכן

$$182=(9+3+1)(4+2+1)a=13\cdot 7\cdot a=91a$$

כלומר $a=2$. מכאן המספר במשבצת המרכזית הוא $6a=12$.

2. מספר שלם נקרא מעניין אם הוא סכום של שני מספרים שלמים חיוביים עוקבים, וגם סכום של שישה מספרים שלמים חיוביים עוקבים. מצאו את הכמות הכוללת של מספרים מעניינים שקטנים מ-2016.

תשובה. 333.

פתרון. נשים לב שכל מספר שהוא סכום של 6 מספרים עוקבים, כלומר מהצורה

$$n=k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)+(k+5)$$

הוא בעצם $6k+1+2+3+4+5=6k+15$, וזה מספר אי-זוגי מסוג $2m+1$, (במקרה זה $m=3k+7$), לכן גם אפשר להציגו בתור $m+(m+1)$. כלומר הוא גם סכום של שני עוקבים. לכן התנאי הראשון הוא מיותר; לא צריך לדרוש במפורש שהמספר הוא סכום של שני עוקבים, מספיק לדבר על מספרים מהצורה $6k+15$, כאשר k טבעי. כלומר את כל המספרים שיש ניתן לקבל בצורה כזאת – מתחילים ב-21 ומתקדמים בקפיצות של 6 (כל פעם שמגדילים k ב-1 המספר גודל ב-6), עד שלא מגיעים ל-2016 או למספר יותר גדול. אם נחסיר מהמספרים האלה 15, נקבל כפולות של 6 החל מ-6 שקטנות מ-2001. אבל $\frac{2000}{6}=\frac{1800+180+18+2}{6}=333+\frac{1}{3}$, לכן יש כפולות 333 כפולות של 6 עד 2000.

3. מצאו 4 מספרים שלמים חיוביים שונים a, b, c ו- d כך ש- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

פתרון. לשאלה זו יש הרבה פתרונות שאפשל לבנות אותם בצורה כזאת: מוצאים 4 מספרים טבעיים שונים, כך ש- $m+i=n+k$, ומחלקים בכפולה משותפת של המספרים.
למשל: $1+4=2+3$, נחלק ב-12 את שני האגפים ונקבל $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$.

4. באי מסוים חיים שקרנים ודוברי אמת. דוברי אמת אומרים תמיד אמת, ושקרנים תמיד משקרים. התרחש רצח, שבוצע על ידי אחד מבין 3 חשודים: אגתה, בנדיקט או גילברט. החשודים נשאלו מספר שאלות, ותשובותיהם נרשמו בפרוטוקול:

אגתה אמרה: "בנדיקט רוצח".
בנדיקט אמר: "גילברט שקרן".
גילברט אמר: "אגתה רוצחת".
אגתה אמרה: "בנדיקט שקרן".

יתכן, שהפרוטוקול נכתב על ידי דובר אמת, ואז מה שכתוב בו זה בדיוק מה שנאמר, ויתכן גם שהפרוטוקול נכתב על ידי שקרן, ואז כל מה שנאמר הפוך למה שנכתב (כלומר אגתה אמרה למעשה: "בנדיקט לא רוצח" וכדומה). האם ניתן לדעת על סמך הפרוטוקול מי הרוצח?

תשובה. כן, הרוצח הוא גילברט.

פתרון. נבדוק שני מקרים: הפרוטוקול נכתב על ידי דובר אמת או על ידי שקר שקרן.

(א) הפרוטוקול נכתב על ידי דובר אמת. אגתה אמרה שבנדיקט שקרן, אז אגתה ובנדיקט מסוגים הפוכים: שקרן ודובר אמת. בנדיקט אמר שגילברט שקרן, אז גם הם מסוגים הפוכים: שקרן ודובר אמת. לכן אגתה וגילברט מאותו סוג: שני שקרנים או שני דוברי אמת. אבל אגתה אמרה כי בנדיקט רוצח, וגילברט אמר כי אגתה רוצחת. שני הדברים לא יכולים להיות נכונים בו-זמנית (כי נתון שיש רוצח אחד). לכן אגתה וגילברט משקרים, ולכן הרוצח הוא לא בנדיקט ולא אגתה אלה דווקא גילברט.

(ב) נניח שהפרוטוקול נכתב על ידי שקרן. אז הפרוטוקול האמיתי אמור להיראות כך:

אגתה אמרה: "בנדיקט לא רוצח".
בנדיקט אמר: "גילברט לא שקרן".
גילברט אמר: "אגתה לא רוצחת".
אגתה אמרה: "בנדיקט לא שקרן".

(אגב, הרבה יותר נחמד בלי כל ההאשמות.) אז בעצם אגתה אמרה שבנדיקט דובר אמת, שזה אומר כי הם מאותו סוג: או שניהם דוברי אמת, או שניהם שקרנים. כמו כן, גילברט ובנדיקט מאותו סוג. כלומר כל החשודים מאותו סוג: כולם דוברי אמת, או כולם שקרנים.

אם כולם שקרנים, אז גם אגתה משקרת כשהיא אומרת שבנדיקט לא רוצח, כלומר בנדיקט רוצח. כמו כן גילברט משקר כאשר הוא אומר שאגתה לא רוצחת, כלומר אגתה רוצחת. אבל אז יש שני רוצחים בניגוד למה שנתון. לכן לא יתכן שכולם שקרנים.

אם כולם דוברי אמת, אז אגתה אמרה שבנדיקט לא רוצח, וגילברט אמר שאגתה לא רוצחת, וצריך להאמין לשתי הטענות; לכן רק גילברט יכול להיות רוצח.

מסקנה: בכל המקרים גילברט רוצח, למרות שעדיין לא הצלחנו לקבוע מי שקרן ומי דובר אמת לא לגבי החשודים ולא לגבי זה שכתב את הפרוטוקול.

הערה. בעצם, אם משנים סוג של כותב הפרוטוקול ואת הסוגים של כל החשודים, אז המצב אותו דבר (למשל אם אגתה אמרה: "בנדיקט לא רוצח", ושיקרה, זה שקול למצב שהיא אמרה: "בנדיקט רוצח" ודיברה אמת). לכן ניתן לקצר את הפתרון פי 2, ולצאת מנקודת הנחה כי כותב הפרוטוקול רשם בדיוק מה שנאמר ולא הפוך.

5. בתרגיל חילוק ארוך, חילקו מספר תלת-ספרתי במספר דו-ספרתי, וקיבלו מספר עם שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית. לאחר מכן, החליפו את כל הספרות בתרגיל בכוכביות. מצאו את הספרות שהיו רשומות בתרגיל.

```
  a.b c d
 ________
  * * *|e f
-   * *
    ---
      * *
   -  * *
      -----
      * * *
   -  * * *
      -----
          * *
       -  * *
          ---
            0
```

לטובת הפתרון נסמן מספר כוכביות באותיות; כמובן אין דרישה שאותיות שונות מסמנות ספרות שונות.

פתרון. אם $\overline{a.bcd}\cdot\overline{ef}$ מספר שלם, אז $abcd\cdot ef$ מתחלק ב-1000.
הספרה d אינה 0, אחרת החילוק הארוך היה עוצר צעד אחד קודם.
אבל $\overline{abcd}\cdot\overline{ef}$ מתחלק ב-1000, כלומר ב-$2^3\cdot5^3$. לא יתכן ש-d זוגי שלא מתחלק ב-5, הרי אז $\overline{ef}$ חייב להתחלק ב-125 והוא לא.
לכן $d=5$, והמספר $\overline{ef}$ שבו מחלקים בהכרח מתחלק ב-8.

בשלב הראשון של חילוק מחסירים ממספר תלת-ספרתי מספר דו-ספרתי ומקבלים מספר חד-ספרתי. זה יתכן רק כאשר המספר התלת-ספרתי הוא $10*$, והמספר הדו-ספרתי מתחיל ב-9.

מבין הספרות של המספר $\overline{abcd}$ הספרה c היא הגדולה ביותר, כי רק כאשר מכפילים את $\overline{ef}$ ב-c מקבלים מספר תלת-ספרתי. אבל כאשר מכפילים ב-$d=5$ למשל מקבלים עדיין

מספר דו-ספרתי. מכאן המסקנה ש- $\overline{ef} < 20$, אבל קודם הגענו למסקנה ש- $\overline{ef}$ מתחלק ב-8 וכמובן נתון שהוא מספר דו-ספרתי. קיים רק מספר אחד שמתחלק ב-8, דו-ספרתי וקטן מ-20, ולכן $\overline{ef}=16$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6.b\,c\,5 \\
\hline
1\,0\,* & 1\,6 \\
-\;9\,6 & \\
*\,0 & \\
-\;*\,* & \\
\,\,0 & \\
-\;*\,*\,* & \\
8\,0 & \\
-\;8\,0 & \\
0 &
\end{array}
$$

לכן בהחסרה האחרונה החסירו $5\cdot 16=80$, וכבר היה 80, הרי נשאר בסוף 0.

בהחסרה ראשונה מחסירים ממספר תלת-ספרתי מספר דו-ספרתי ומקבלים מספר חד-ספרתי. לכן $a\cdot\overline{ef}$ הוא מספר דו-ספרתי שמתחיל ב-9, ומבין כפולות של 16 זה קורה רק עבור $6\cdot 16=96$, לכן $a=6$. הספרה b אינה עולה על 6 (אחרת היינו מקבלים בהחסרה השנייה מספר תלת-ספרתי), והספרה c היא 7 לפחות, כי דווקא בהחסרה השלישית מחסירים מספר תלת-ספרתי. אבל החל מפעם הראשונה המספרים שמחסירים מהם מסתיימים ב-0. לכן בפעם השלישית המספר שאותו מחסירים, $c\cdot\overline{ef}$, בהכרח מסתיים ב-2, כך שיישאר 8. נשים לב כי $6\cdot 7$ אכן מסתיים ב-2, בניגוד ל-$6\cdot 8$ שמסתיים ב-8 ו-$6\cdot 9$ שמסתיים ב-4. לכן בהכרח $c=7$, ובפעם השלישית מחסירים את $7\cdot 16=112$. מכיוון שבחיסור נשאר 8, המספר שמחסירים ממנו בפעם השלישית הוא 120.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6.3\,7\,5 \\
\hline
1\,0\,2 & 1\,6 \\
-\;9\,6 & \\
6\,0 & \\
-\;4\,8 & \\
1\,2\,0 & \\
-\;1\,1\,2 & \\
8\,0 & \\
-\;8\,0 & \\
0 &
\end{array}
$$

לכן המספר שמחסירים אותו בפעם השנייה מסתיים ב-8. זאת אומרת ש-$b=3$, הרי $b\le 6$, ומבין מספרים מ-0 עד 6 רק 3 מקיים ש-$6\cdot b$ מסתיים ב-8. מכאן מקבלים בצורה חד-משמעית את כל המספרים שמחסירים אותם, ואז כאשר הולכים מלמטה כלפי מעלה מקבלים גם בצורה חד-משמעית את המספרים שמחסירים מהם.

6. על הלוח רשומות N ספרות שונות, שכולן גדולות מ-0 (כלומר, מ-1 עד 9). אין אף זוג ספרות רשומות שהסכום שלהן שווה לספרה אחרת שרשומה. מה הוא הערך הגדול ביותר האפשרי עבור N?

תשובה. 5.

פתרון. הספרות 5, 6, 7, 8, 9 מקיימות את התנאי: סכום כל שתי ספרות שונות הוא לפחות 11, וזה גדול מ-9.

דוגמה אחרת היא רשימה של כל הספרות האי-זוגיות: 1, 3, 5, 7, 9. סכום כל שתי ספרות ברשימה הוא זוגי, ולכן לא שווה לאף ספרה ברשימה.

כמובן מספיקה דוגמה אחת על מנת להדגים שאפשר לעשות 5 ספרות. דוגמאות נוספות הם 4, 6, 7, 8, 9 וגם 4, 5, 6, 7, 8.

נוכיח שאי-אפשר ליצור רשימה של 6 ספרות.

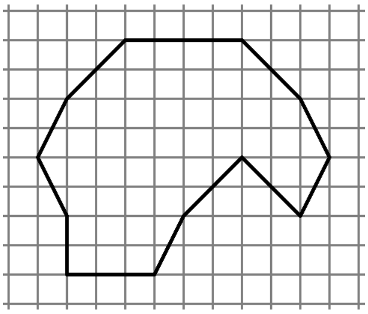
אם 1 ברשימה, אז נתבונן בזוגות $(2,3)$, $(4,5)$, $(6,7)$, $(8,9)$. מכל זוג אפשר לרשום רק מספר אחד לכל היותר, אחרת המספר הקטן פלוס 1 ייתן את המספר הגדול.

אם 1 לא ברשימה אבל 2 כן ברשימה, אז בזוגות $(3,5)$, $(4,6)$, $(7,9)$ ניתן לבחור רק מספר אחד מכל זוג. לכן חייבים לדלג על 3 ספרות שונות בזוגות אלה, וגם על 1, כלומר מדלגים על 4 ספרות לפחות.

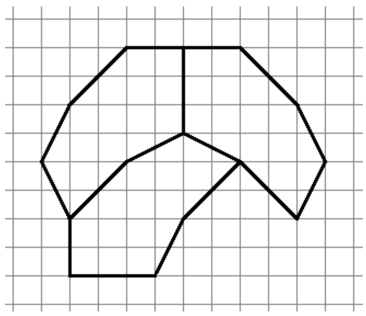
אם גם 1 וגם 2 לא ברשימה, אבל 3 ברשימה, אז בזוגות $(4,7)$, $(5,8)$, $(6,9)$ אפשר לקחת רק מספר אחד בכל זוג. לכן מדלגים על 1, 2, ועוד 3 ספרות מהזוגות שהצגנו, כלומר מדלגים לפחות על 5 ספרות ואז ברשימה לכל היותר 4 ספרות.

נשאר לבדוק מקרה ש-1, 2 ו-3 כולם מחוץ לרשימה. אם מקווים עדיין לקחת 6 ספרות, אז בהכרח חייבים לקחת את כל הספרות מ-4 עד 9, אבל $4+5=9$.

7. חלקו את הצורה לשלושה חלקים חופפים (מאותו גודל ואותה צורה).



פתרון.



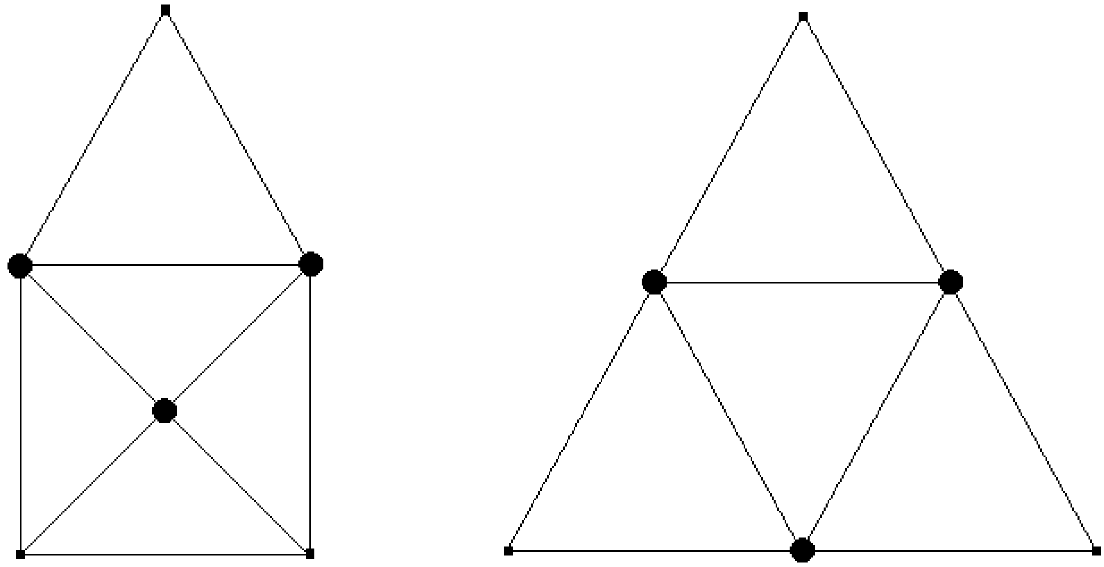
8. בארץ רחוקה מאוד שתי ערים נחשבות קרובות עם המרחק בינם קטן מ-5 קילומטרים. בארץ הרחוקה מאוד יש 3 ערים גדולות ו-3 ערים קטנות. מרגל מהארץ הרחוקה מאוד מדווח שעבור כל עיר גדולה יש בדיוק 4 ערים קרובות אליה, ושלכל עיר קטנה יש 2 או 3 ערים קרובות. כמה ערים יכולות להיות, עבורן יש בדיוק 2 ערים קרובות?

תשובה. 1 או 3.

פתרון. לכל עיר נכתוב את רשימת הערים הקרובות אליה, בשורות נפרדות. כל זוג ערים קרובות יתרום שתי שורות לרשימות אלה, לכן בסה"כ יש מספר זוגי של שורות ברשימות

אלה. לכן לא יתכן שלכל עיר קטנה יש שלוש ערים קרובות, ולא יתכן שיש עיר אחד שאליה יש שלוש ערים קרובות.

לכן כמות הערים הקטנות שיש להן 3 ערים קרובות היא 2 או 0, וכאלה שיש להם 2 ערים קרובות זה 1 או 3. נשאר לבדוק האם שתי האפשרויות הללו קיימות.



בציור יש דוגמאות של שתי מפות. בצד ימין יש משולש שווה-צלעות, שצלע שלו 98 קילומטרים, בקודקודים נמצאות ערים קטנות ובאמצעי צלעות ערים גדולות. הערים הקרבות מחוברות בקווים, ורואים שמכל עיר קטנה יש 2 קווים ומכל עיר גדולה 4 קווים.

בצד ימין מפה אחרת, שמורכבת מריבוע שצלע שלו 49 קילומטרים, מרכז של ריבוע, ומשולש משוכלל שמודבק לצלע העליונה של ריבוע. במרכז הריבוע ובשני הקודקודים העליונים שלו ערים גדולות; בני הקודקודים התחתונים ובקודקוד העליון של המשולש המשוכלל ערים קטנות. הערים הקרובות שוב מחוברים בקווים. קל לראות שכאן לכל עיר גדולה יש 4 ערים קרובות, לשתי ערים קטנות יש 3 ערים קרובות, ולעיר קטנה אחת יש 2 ערים קרובות.

מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

כיתות ח'

1. מספרים טבעיים a, b ו- k מקיימים $2^a \cdot 3^b = 48^k$, ובנוסף $a+b=2015$. מצאו את k.

תשובה. 403.

פתרון. $48=2^4\cdot 3$, ולכן מקבלים $2^a\cdot 3^b = 2^{4k}\cdot 3^k$, כלומר $2^{a-4k}=3^{k-b}$. מכיוון שהחזקה השלמה היחידה של 2 שהיא גם חזקה של 3 היא $2^0=1=3^0$, מקבלים כי

$$a-4k=0=k-b,$$

כלומר $k=b$ וכן $a=4k$. מכאן

$$2015=a+b=4k+k=5k,$$

לכן $k=\frac{2015}{5}=403$.

2. על הלוח היו כתובים 4 מספרים. לכל אחד מזוגות המספרים שניתן להרכיב מהמספרים על הלוח, עמוס חישב את סכום המספרים בזוג וכתב אותו במחברת. המספרים שעמוס כתב הם 2, 4, 9, 9, 14, 16. אילו מספרים היו כתובים על הלוח?

תשובה. -1.5, 3.5, 5.5, 10.5.

פתרון. נסדר את המספרים שהיו רשומים על הלוח בסדר עולה: $a\le b\le c\le d$. אז קל לראות, שמבין 6 המספרים הרשומים במחברת, $c+d$ הוא המספר הגדול ביותר, המספר $b+d$ הוא המספר השני בגודלו, והוא גדול או שווה גם ל- $a+d$ וגם ל- $b+c$. המספר $a+c$ קטן או שווה לשני המספרים האחרונים, והמספר $a+b$ הוא הקטן ביותר. מכאן במקרה שלנו $a+b=2$ כי הוא הכי קטן, ו- $a+c=4$ כי הוא הכי קטן מבין האחרים, כמו כן $c+d=16$ כי הוא הכי גדול ו- $b+d=14$ כי הוא השני בגודלו, ולכן גם ניתן לדעת ששני המספרים שנשארו הם $a+c=9=b+d$.

לכן $2a=(a+b)+(a+c)-(b+c)=2+4-9=-3$, כלומר $a=-1.5$.

לכן $b=2-a=3.5$, $c=4-a=5.5$, $d=9-a=10.5$.

קל לראות שבמקרה זה $b+c$, $c+d$, $b+d$ גם נותנים את הערך הרצוי.

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

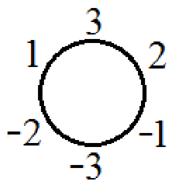
מדינת ישראל
משרד החינוך

3. האם אפשר לרשום N מספרים שלמים שונים מסביב למעגל כך שכל מספר הוא סכום של שני המספרים הסמוכים אליו

א. כאשר $N=6$?

ב. כאשר $N=7$?

תשובות. א. כן. ב. לא

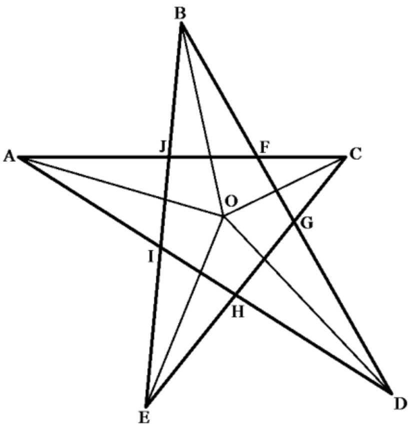


פתרון. עבור $N=6$ אפשר לבנות דוגמה מפורשת:
עבור $N=7$ זה לא מתאפשר. אם נתבונן ב-4 מספרים רצופים a,b,c,d על המעגל אז

$$b=a+c\ ,\ c=b+d$$

כלומר $a=b-c=-d$. באופן דומה, אם לאחר d בהמשך המעגל נמצאים מספרים e,f,g, אז $g=-d$. לכן $g=a$. לכן המספרים שרשומים במעגל לא באמת שונים.

4. נתון כוכב מחומשי: הקטעים AC, BD, CE, DA, EB נפגשים בזוגות בנקודות F, G, H, I, J, כמתואר בציור. חוצי הזוויות של ∢DAC, ∢EBD, ∢ACB, ∢BDA, ∢BEC נפגשים בנקודה O. הוכיחו כי גם חוצי הזוויות של המחומש FGHIJ נפגשים בנקודה אחת.



פתרון. נקודה O נמצאת במרחק שווה מהישרים AD ו-AC, מכיוון שהיא נמצאת על חוצה הזווית של A. כמו כן, היא נמצאת במרחק שווה מ-BE ו-BD, כי היא נמצאת על חוצה הזווית של-B, במרחק שווה מהישרים AC ו-CE, מהישרים DB ו-DA. זאת אומרת שהיא בעצם נמצאת במרחק שווה מכל הישרים של הכוכב המחומש.

אפשר לנסח את הטענה גם אחרת – O נמצאת במרחק שווה מהישרים של כל הצלעות של המחומש FGHIJ (כי זה בעצם אותם ישרים). לכן חוצי זוויות של המחומש FGHIJ כולם עוברים דרך O, כלומר נפגשים בנקודה אחת.

5. בתרגיל חילוק ארוך, חילקו מספר תלת-ספרתי במספר דו-ספרתי, וקיבלו מספר עם שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית. לאחר מכן, החליפו את כל הספרות בתרגיל בכוכביות. מצאו את הספרות שהיו רשומות בתרגיל.

לטובת הפתרון נסמן מספר כוכביות באותיות; כמובן אין דרישה שאותיות שונות מסמנות ספרות שונות.

פתרון. אם $\overline{a.bcd}\cdot\overline{ef}$ מספר שלם, אז $\overline{abcd}\cdot\overline{ef}$ מתחלק ב-1000. הספרה d אינה 0, אחרת החילוק הארוך היה עוצר צעד אחד קודם. אבל $\overline{abcd}\cdot\overline{ef}$ מתחלק ב-1000, כלומר ב- $2^3\cdot 5^3$. לא יתכן ש- d זוגי שלא מתחלק ב-5, הרי אז $\overline{ef}$ חייב להתחלק ב-125 והוא לא. לכן $d=5$, והמספר $\overline{ef}$ שבו מחלקים בהכרח מתחלק ב-8.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{a.b\,c\,d} & \\ \hline *\,*\,* & e\,f \\ -\;*\,* & \\ \hline *\,* & \\ -\;*\,* & \\ \hline *\,*\,* & \\ -\;*\,*\,* & \\ \hline *\,* & \\ -\;*\,* & \\ \hline 0 & \end{array}$$

בשלב הראשון של חילוק מחסירים ממספר תלת-ספרתי מספר דו-ספרתי ומקבלים מספר חד-ספרתי. זה יתכן רק כאשר המספר התלת-ספרתי הוא $10*$, והמספר הדו-ספרתי מתחיל ב-9.

מבין הספרות של המספר $\overline{abcd}$ הספרה c היא הגדולה ביותר, כי רק כאשר מכפילים את $\overline{ef}$ ב- c מקבלים מספר תלת-ספרתי. אבל כאשר מכפילים ב-$d=5$ למשל מקבלים עדיין מספר דו-ספרתי. מכאן המסקנה ש- $\overline{ef}<20$, אבל קודם הגענו למסקנה ש- $\overline{ef}$ מתחלק ב-8 וכמובן נתון שהוא מספר דו-ספרתי. קיים רק מספר אחד שמתחלק ב-8, דו-ספרתי וקטן מ-20, ולכן $\overline{ef}=16$.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{6.b\,c\,5} & \\ \hline 1\,0\,* & 1\,6 \\ -\;9\,6 & \\ \hline *\,0 & \\ -\;*\,* & \\ \hline *\,*\,0 & \\ -\;*\,*\,* & \\ \hline 8\,0 & \\ -\;8\,0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

לכן בהחסרה האחרונה החסירו $5\cdot16=80$, וכבר היה 80, הרי נשאר בסוף 0.

בהחסרה ראשונה מחסירים ממספר תלת-ספרתי מספר דו-ספרתי ומקבלים מספר חד-ספרתי. לכן $a\cdot\overline{ef}$ הוא מספר דו-ספרתי שמתחיל ב-9, ומבין כפולות של 16 זה קורה רק עבור $6\cdot16=96$, לכן $a=6$. הספרה b אינה עולה על 6 (אחרת היינו מקבלים בהחסרה השנייה מספר תלת-ספרתי), והספרה c היא 7 לפחות, כי דווקא בהחסרה השלישית מחסירים מספר תלת-ספרתי.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{6.3\,7\,5} & \\ \hline 1\,0\,2 & 1\,6 \\ -\;9\,6 & \\ \hline 6\,0 & \\ -\;4\,8 & \\ \hline 1\,2\,0 & \\ -\;1\,1\,2 & \\ \hline 8\,0 & \\ -\;8\,0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

אבל החל מפעם הראשונה המספרים שמחסירים מהם מסתיימים ב-0. לכן בפעם השלישית המספר שאותו מחסירים, $c\cdot\overline{ef}$, בהכרח מסתיים ב-2, כך שיישאר 8. נשים לב כי $6\cdot7$ אכן מסתיים ב-2, בניגוד ל- $6\cdot8$ שמסתיים ב-8 ו-$6\cdot9$ שמסתיים ב-4. לכן בהכרח $c=7$, ובפעם השלישית מחסירים את $7\cdot16=112$. מכיוון שבחיסור נשאר 8, המספר שמחסירים ממנו בפעם השלישית הוא 120.

לכן המספר שמחסירים אותו בפעם השנייה מסתיים ב-8. זאת אומרת ש-$b=3$, הרי $b\le 6$, ומבין מספרים מ-0 עד 6 רק 3 מקיים ש-$6\cdot b$ מסתיים ב-8. מכאן מקבלים בצורה חד-משמעית את כל המספרים שמחסירים אותם, ואז כאשר הולכים מלמטה כלפי מעלה מקבלים גם בצורה חד-משמעית את המספרים שמחסירים מהם.

6. האם קיימים מספרים שלמים a, b ו-c המקיימים מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} a^5+b^5+c^5=2016abc \\ a+b+c=5776 \end{cases}$$

תשובה: לא.

פתרון ראשון. נוכיח טענה: לכל מספר שלם n , המספר n^5-n מתחלק ב-3. אכן,

$$n^5-n=n\cdot\left(n^4-1\right)=n\cdot\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)$$

המספרים $n-1$, n, $n+1$ הם 3 מספרים רצופים, ובוודאי אחד מהם מתחלק ב-3, לכן מכפלתם תמיד חייבת להתחלק ב-3. לכן גם n^5-n מתחלק ב-3.

כעת נחסיר את שתי המשוואות הנתונות. נקבל:

$$a^5-a+b^5-b+c^5-c=2016abc-5776$$

אגף שמאל של המשוואה שהתקבלה מתחלק ב-3 לפי הטענה שהוכחנו, גם 2016 מתחלק ב-3, אבל 5776 לא מתחלק ב-3. לכן קיבלנו סתירה – מספר שמתחלק ב-3 שווה למספר שלא מתחלק ב-3. זה לא מתקיים אף פעם, לכן לא יתכן ששתי המשוואות במערכת משוואות התקיימו, לכן אין אף פתרון למערכת משוואות.

פתרון שני. נגיד כי $m=n\left(\bmod 3\right)$ אם $m-n$ מתחלק ב-3. הגדרה זו מחלקת מספרים ל-3 סוגים כאלה שהם 0, 1 או -1 מודולו 3. קל לראות כי

$$\left(-1\right)^5=-1\left(\bmod 3\right),\ 1^5=1\left(\bmod 3\right),\ 0^5=0\left(\bmod 3\right)$$

ולכן לכל מספר שלם $n^5=n\left(\bmod 3\right)$. אז אם נסתכל על המערכת מודולו 3:

$$\begin{cases} a+b+c=0\left(\bmod 3\right) \\ a+b+c=1\left(\bmod 3\right) \end{cases}$$

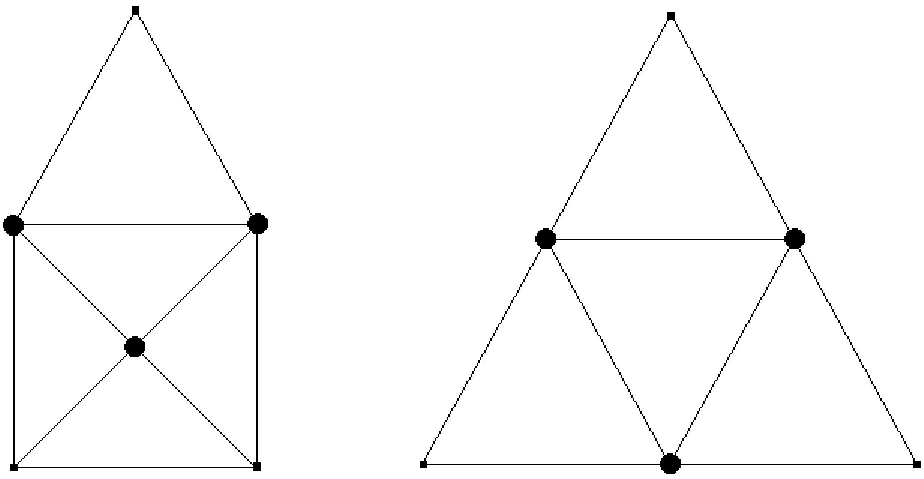
ברור שלמערכת זו אין פתרונות מודולו 3.

7. בארץ רחוקה מאוד שתי ערים נחשבות קרובות אם המרחק ביניהן קטן מ-50 קילומטרים. בארץ הזו יש 3 ערים גדולות ו-3 ערים קטנות. מרגל מהארץ הזו מדווח שלכל עיר גדולה יש בדיוק 4 ערים שקרובות אליה, ושלכל עיר קטנה יש 2 או 3 ערים קרובות. כמה ערים יכולות להיות, עבורן יש בדיוק 2 ערים קרובות?

תשובה: 1 או 3.

פתרון. לכל עיר את נרשום את רשימת הערים הקרובות אליה. כל זוג ערים קרובות ברשימות אלה יופיע פעמיים, לכן בסה"כ יש מספר זוגי של שורות ברשימות אלה. לכן לא יתכן שלכל עיר קטנה יש שלוש ערים קרובות, ולא יתכן שיש עיר אחד שאליה יש שלוש ערים קרובות.

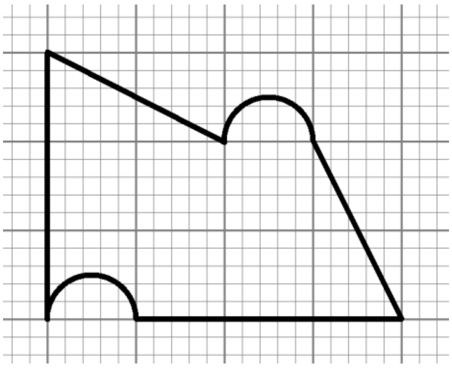
לכן כמות הערים הקטנות שיש להן 3 ערים קרובות היא 2 או 0, וכאלה שיש להם 2 ערים קרובות זה 1 או 3. נשאר לבדוק האם שתי האפשרויות הללו קיימות.



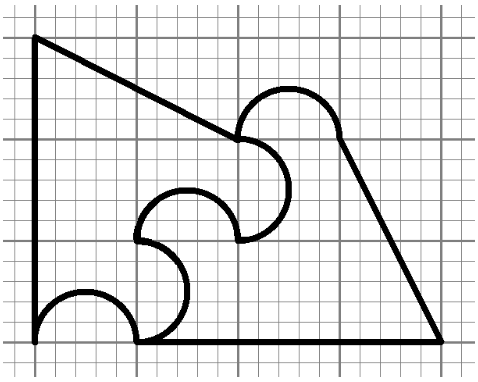
בציור יש דוגמאות של שתי מפות. בצד שמאל יש משולש שצלע שלו 98 קילומטרים, בקודקודים נמצאות ערים קטנות ובאמצעי צלעות ערים גדולות. הערים הקרוסות מחוברות בקווים, ורואים שמכל עיר קטנה יש 2 קווים ומכל עיר גדולה 4 קווים.

בצד ימין מפה אחרת, שמורכבת מריבוע שצלע שלו 49 קילומטרים, מרכז של ריבוע, ומשולש משוכלל שמודבק לצלע העליונה של ריבוע. במרכז הריבוע ובשני הקודקודים העליונים שלו ערים גדולות; בני הקודקודים התחתונים ובקודקוד העליון של המשולש המשוכלל ערים קטנות. הערים הקרובות שוב מחוברים בקווים. קל לראות שכאן לכל עיר גדולה יש 4 ערים קרובות, לשתי ערים קטנות יש 3 ערים קרובות, ולעיר קטנה אחת יש 2 ערים קרובות.

7. חלקו את הצורה לשני חלקים שווים (מאותו גודל ואותה צורה)



פתרון.



כיתות ט'

1. משולש נקרא טוב אם הוא שווה שוקיים וכל צלעותיו בעלות אורך שלם. יעל מציירת משולשים טובים בעלי היקף 2015, שאף שניים מהם לא חופפים. יוסי מצייר משולשים טובים בעלי היקף 2016, שאף שניים מהם לא חופפים. מי יוכל לצייר יותר משולשים: יוסי או יעל?

תשובה. יעל.

פתרון ראשון. בסיס של a משולש שהיקפו 2015 הוא מספר אי-זוגי, הרי שני השוקיים הם באורך $\frac{2015-a}{2}$, לכן $2015-a$ חייב להתחלק ב-2.

המספרים a, $\frac{2015-a}{2}$, $\frac{2015-a}{2}$ יוצרים משולש רק אם מתקיים אי-שוויון המשולש: סכום שני השוקיים גדול מהבסיס, כלומר בהכרח $2015-a>a$. כלומר $2015>2a$, או $1007.5>a$ ובנוסף גם a הוא מספר אי-זוגי, וזה נותן 504 אפשרויות.

באופן דומה כאשר מדברים על משולשים שווי-שוקיים שהיקפם 2016, אז צלעות המשולש הם b, $\frac{2016-b}{2}$ ו- $\frac{2016-b}{2}$, כאשר b בהכרח זוגי (אחרת השוקיים לא שלמים), ומתקיים אי-שוויון המשולש, כלומר $2016-b>b$, כלומר $2016>2b$, כלומר $1008>b$ כאשר $b=2k$ זוגי, כלומר $504>k$ ולזה יש 503 אפשרויות.

פתרון שני. לכל משולש של יוסי היקף זוגי, והשוקיים שלמים, לכן גם הבסיס זוגי. לכן תמיד ניתן להקטין בסיס ב-1 ולקבל משולש תקני עבור יעל.

לכל משולש של יעל ננסה לבצע פעולה הפוכה. כלומר ננסה להגדיל את הבסיס ב-1. כאשר השוקיים הם באורך a והבסיס באורך c, ניתן להגדיל ולהפוך את הבסיס ל-$c+1$. עלולה להיות בעיה: יתכן כי $a+a=c+1$, ואז לא יתקבל המשולש. על מנת שזה יקרה צריך להתקיים כי $4a=2016$, וזה יתכן, הרי 2016 מתחלק ב-4.

לכן בנינו התאמה כמעט מושלמת, אבל לא לגמרי: לכל משולש של יוסי מתאים משולש של יעל, אבל לא לכל משולש של יעל מתאים משולש של יוסי. לכן ליעל יש יותר משולשים.

2. המספרים הממשיים x ו- y מקיימים את המשוואות $x^3+y^3=9$ ו-$x^2y+y^2x=6$.
חשבו את $x+y$.

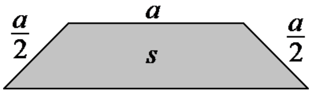
פתרון. נזכר כי $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3\left(x^2y + xy^2\right)$. לכן במקרה שלנו

$$(x+y)^3 = 9 + 3\cdot 6 = 27$$

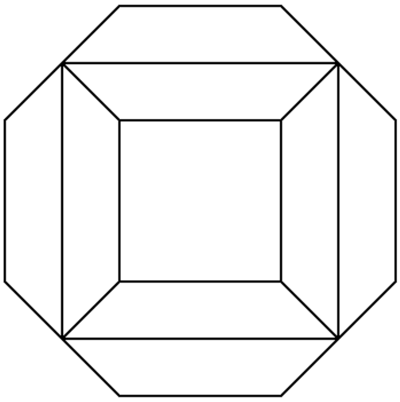
כלומר $x+y=3$.

הערה. קיים זוג אחד בדיוק שפותר את המשוואה: $\{1,2\}$

2. נתון טרפז שווה-שוקיים, שהזוויות שלו ליד הבסיס הגדול שוות 45°, אורכי השוקיים $\frac{a}{2}$ ואורך הבסיס הקטן הוא a.



שטח הטרפז יסומן s. הוכיחו ששטחו של המתומן המשוכלל שכל צלע שלו שווה ל-a הוא a^2+8s.



פתרון. מכיוון שמריבוע שצלעות שלו שוות a ו-8 טרפזים כאלה אפשר להרכיב מתומן משוכלל (ראו ציור).

4. פתרו את המשוואה $\frac{x^2+9}{6x} = \sqrt{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{\frac{3-x}{2}}$.

תשובה. $x=3$.

פתרון ראשון. על מנת שהביטוי יהיה בכלל מוגדר, חייבים שהמספרים $\frac{x-1}{2}$ ו-$\frac{3-x}{2}$ יהיו אי-שליליים, אחרת המשוואה פשוט לא מוגדרת. לכן $1 \le x \le 3$. נשים לב שאז שני הביטויים מתחת לשורשים הם בין 0 ל-1. לכן גם השורשים בין 0 ל-1, ולכן הפרשם בין 1 לבין -1. לכן בפרט האגף השמאלי של המשוואה אינו עולה על 1.

מצד שני, אם x חיובי (שזה המצב) האגף הימני הוא לפחות 1:

$$\frac{x^2+9}{6x} \ge 1$$

שכן $x^2+9 \ge 6x$, מכיוון ש-$x^2-6x+9 \ge 0$, היות ו- $(x-3)^2 \ge 0$.

לכן על מנת שיתקיים שוויון בין אגף שמאל לימין, שני האגפים צריכים להיות שווים ל-1, כלומר בהכרח $\frac{x^2+9}{6x}=1$, ובנוסף $\sqrt{\frac{3-x}{2}}=0$, וגם $\sqrt{\frac{x-1}{2}}=1$.

במילים אחרות $x^2-6x+9=0$ ובנוסף $\frac{3-x}{2}=0$, וגם $\frac{x-1}{2}=1$.

כל אחד מבין 3 התנאים האלה מתקיים אך ורק כאשר $x=3$, ולכן זה הפתרון היחיד.
הצבה פשוטה מראה שפתרון זה באמת מתאים.

פתרון שני. נעלה את המשוואה בריבוע.

$$\frac{x-1}{2}+\frac{3-x}{2}-2\sqrt{\frac{x-1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3-x}{2}}=\frac{\left(x^2+9\right)^2}{(6x)^2}$$

$$1-2\sqrt{\frac{x-1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3-x}{2}}=\frac{x^4+18x^2+9^2}{36x^2}$$

$$-2\sqrt{\ldots}=\frac{x^4+18x^2+9^2}{36x^2}-1=\frac{x^4+18x^2+9^2-36x^2}{36x^2}=\frac{x^4-18x^2+9^2}{36x^2}$$

$$-2\sqrt{\ldots}=\left(\frac{x^2-9}{6x}\right)^2$$

הדבר הזה לא הגיוני: אגף שמאל שלילי, ואגף ימין חיובי. אלה אם כן שניהם שווים ל-0.
אז הביטוי תחת השורש אפס, $\frac{x-1}{2}\cdot\frac{3-x}{2}=0$, וגם $\frac{x^2-9}{6x}=0$. כלומר x חייב להיות מצד אחד 3 או 1, מצד שני הוא חייב להיות ± 3. שזה כמובן מתקיים רק כאשר $x=3$.

5. מצאו את כל הזוגות (a,b) של מספרים שלמים שונים זה מזה, כך ש-$17(a-b)^2$ מתחלק ב-$a\cdot b$.

תשובה. כל המספרים שהיחס שלהם שווה ל-17.

פתרון. נניח כי למספרים a,b יש מחלק משותף d. אז גם המספרים $a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$ מקיימים את התנאי: $\frac{17(a-b)^2}{d^2}=17(a'-b')^2$ מתחלק ב-$a'b'=\frac{ab}{d^2}$. גם ההפך נכון:
אם יש זוג a,b שהוא פתרון אז גם da,db הוא פתרון.

לכן אפשר למצוא זוגות של מספרים זרים שפותרים את השאלה, ואחר-כך להכפיל אותם בכל המספרים האפשריים, וכך נוכל לקבל את כל הפתרונות. כעת נניח כי a ו-b זרים. אז אין מחלקים משותפים גם ל-$a-b$ ול-b, כי לו היה להם מחלק משותף שגדול מ-1 הוא היה גם מחלק של סכומם, כלומר של a, אבל a ו-b זרים. באופן דומה רואים כי $a-b$ זר גם ל-b. לכן $(a-b)^2$ זר ל-ab. לכן אם נאמר כי $17(a-b)^2$ מתחלק ב-ab, בעצם אפשר להגיד ש-17 מתחלק ב-ab. מכיוון ש-17 הוא מספר ראשוני, גם a וגם b חייבים להיות ±1 או ±17. אם הם מספרים שונים, אז אחד מהם שווה ל-1 והשני ל-17. זה נותן רק מספר קטן של זוגות של פתרונות כאשר a ו-b זרים:

$$\{1,17\},\ \{1,-17\},\ \{-1,17\},\ \{-1,1\}$$

אם נכפיל את הזוגות האלה ב-d שלם כלשהו, נקבל 3 משפחות אינסופיות של פתרונות:

$$\{d,17d\},\ \{d,-17d\},\ \{d,-d\}$$

6. נתונה רשימה שמורכבת מ-N מספרים שלמים חיוביים, שכולם קטנים או שווים ל-100. אין אף זוג מספרים ברשימה שהסכום שלהם שווה למספר אחר ברשימה. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי עבור N?

תשובה: 51.

פתרון. לא קשה למצוא דוגמה של 51 מספרים שמקיימים את הדרישה: למשל כל המספרים מ-50 עד 100 כולל. אפילו סכום של שני מספרים שונים הכי קטנים $51+50$ הוא כבר גדול מכל מספר אחר.

צריך אבל גם להוכיח ש-52 מספרים לא יכולים להיות.

הוכחה ראשונה. נניח כי M הוא המספר הגדול ביותר ברשימה. את המספרים שקטנים מ-M נחלק לזוגות: $(1,M-1)$, $(2,M-2)$, ... בכל אחד מהזוגות אפשר לבחור רק מספר אחד, כי אם ייקחו את שני המספרים אז סכומן יהיה המספר M שגם הוא ברשימה.

כל המספרים שקטנים מ-M נמצאים ברשימה זאת, פרט ל-$\frac{M}{2}$ כאשר הוא שלם.

לכן אם $M=2k$, אז אפשר לבחור את M, את k ויש עדו $k-1$ זוגות שמכל אחד מהם אפשר לבחור רק אחד, שזה נותן $k+1$ מספרים ברשימה לכל. אבל $k\le50$ לכן יכולים להיות לכל היותר 51 מספרים ברשימה.

אם $M=2k+1$, אז כל המספרים שקטנים מ- M מחולקים לזוגות, ולכן מלבד M יש לכל היות k מספרים ברשימה. סה"כ יש $k+1$ מספרים ברשימה לכל יותר כאשר $k\le 49$, ולכן יש לכל היותר 50 מספרים ברשימה במקרה זה.

לכן יש בכל מקרה לכל היותר 51 מספרים, ואם יש כזאת כמות 100 חייב להיות ברשימה.

הוכחה שנייה. נניח כי m הוא המספר הקטן ביותר שמופיע ברשימה. נחלק את המספרים הטבעיים החל מ- m ואילך לזוגות בצורה הבאה:

$$
\begin{array}{l}
(m+1,2m+1),\ (m+2,2m+2),\ \ldots,(2m-1,3m-1),(2m,3m),\\
(3m+1,4m+1),(3m+2,4m+2),\ldots,(4m-1,5m-1),(4m,5m),\\
(5m+1,6m+1),(5m+2,6m+2),\ldots,(6m-1,7m-1),(6m,7m),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

כמובן, אפשר להמשיך את הטבלה לאינסוף ולכלול בה את כל המספרים השלמים שגדולים מ- m פעם אחד בדיוק, אבל אנחנו נעצור אותה בשלב מסוים על מנת לא להגיע למספרים שגדולים מ-100. לו היינו עוצרים את הרשימה בסוף השורה, הזוגות שנלקחו היו ממלאים רצף מספרים מ-$m+1$ עד N. אם עוצרים את הרשימה איפשהו באמצע שורה שמתחילה בזוג $\left(km+1,(k+1)m+1\right)$ ומסתיימת בזוג $\left(km+t,(k+1)m+t\right)$ אז בעצם כל מספר בין $m+1$ לבין $(k+1)m+t$ יופיע ברשימה, פרט למספרים בין $km+t$ לבין $(k+1)m+1$.

הסיבה לכך שלא מתחילים שורה חדשה היא שבזוג $\left(km+1,(k+1)m+1\right)$ בתחילת השורה החדשה אחד המספרים (כנראה הגדול יותר) הוא כבר מעל 100. הסיבה לכך שעצרו בתוך השורה היא שהמספר הגדול בזוג החדש שהיה אפשר להוסיף הוא 101. בכל מקרה, אנו רושמים ברשימה את כל המספרים בין $m+1$ ל- 100 פרט לרצף מסוים של מספרים. הרצף של המספרים שלא נכנסו טבלה של זוגות הוא באורך m לכל היותר; מכיוון שאם היה רצף של $m+1$ מספרים, היינו מצליחים להוסיף עוד זוג.

נשים לב, שברשימה המקורית, מכל זוג בטבלה יש נציג אחד לכל היותר. הרי אחרת, אם המספרים $u,u+m$ ברשימה, והנחנו שגם m ברשימה, אז יש ברשימה 3 מספרים שסכום של שניים מהם שווה לשלישי.

ובכן, כאשר מסתכלים על כל המספרים מ-1 עד 100, אפשר לחלק אותם ל-4 סוגים:

(א) המספרים שנמצאים בטבלת זוגות; רק מחצית מהם יכולים להשתתף ברשימה.
(ב) מספרים שקטנים מ- m והם לא משתתפים ברשימה (כי m הכי קטן ברשימה).
(ג) m עצמו שכן משתתף ברשימה.
(ד) מספרים שגדולים מ- m, אבל הם לא בטבלת זוגות. יש m כאלה לכל היותר והם אולי יכולים להשתתף ברשימה.

ביחד מבין המספרים מסוגים ב', ג', ד' יש לכל היותר $2m$ מספרים. אם נמחק את m עצמו מהרשימה, לפחות m מהם לא ישתתפו ברשימה. לכן אם m עצמו ימחק מהרשימה, אז מבין הסוגים ב', ג', ד' יחד לפחות מחצית מהמספרים הם לא ברשימה.

גם בסוג א' לפחות חצי מהמספרים אינם ברשימה. לכן גם בסה"כ לאחר שמחקנו את m לפחות חצי מהמספרים אינם ברשימה, כלומר יש ברשימה לכל היותר 50 מספרים לאחר שמחקנו את m. לכן בכל מקרה ברשימה לכל היותר 51 מספרים.

הערה. אפשר לשאול האם הדוגמה $\{50,51,...,100\}$ היא הדוגמה היחידה, ומסתבר שכן. נמשיך בעזרת הרעיונות של הוכחה ראשונה. כמו שראינו בהוכחה ראשונה, על מנת שיהיו בדיוק 51 מספרים ברשימה, המספר הגדול ביותר חייב להיות 100, ומהזוגות

$$(1,99),(2,98),(3,97),\ldots,(49,51)$$

צריך לקחת מספר אחד מכל זוג, ובנוסף גם 50 צריך להיות ברשימה.

כעת נתבונן ברביעיות של מספרים מסוג $(k,50-k,50+k,100-k)$, כאשר $k\neq 25$ מספר כלשהו מ-1 עד 49. אסור שיהיה ברשימה k ו-$50-k$ או k ו-$100-k$ כי סכומם 50 או 100 שהם ברשימה, ואסור שיהיה k ו-$50+k$ כי $50+k$ הוא סכום של 50 ושל k ששניהם ברשימה. לכן אם המספר k ברשימה אז מבין שני הזוגות $(k,100-k)$, $(50-k,50+k)$ יש רק מספר אחד ברשימה ולא שניים, שזה אסור.

לכן לא יתכן כי מספר בין 1 ל-49 הוא ברשימה, אולי חוץ מ-25. כלומר המספרים
50, 51, 52, . . . , 73, 74, 76, 77, 78, . . . , 98, 99, 100.

חייבים להיות ברשימה (הרי חייבים לקחת מספר מכל זוג), וצריך לבחור בנוסף מספר אחד מבין 25 או 75, אבל אי-אפשר 25 מכיוון ש- $60+25=85$, ולכן חייבים לקחת 75.

7. במרובע ABCD נתון: $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CAD=60^\circ=2\sphericalangle BCD$, $AC=2015$. מצאו את היקף המשולש BAD.

תשובה. 2015.

פתרון ראשון. נתבונן במשולש BAD. חוצה זווית של הזווית A וחוצה זווית חיצוני של הזווית B נפגשים בנקודה E, שנמצאת במרחק שווה לישרים AB, AD, BD ולכן נמצאת גם על חוצה הזווית החיצונית של D. הזוויות $\sphericalangle EBD, \sphericalangle EDB$ הן מחצית הזוויות החיצוניות במשולש BAD, ולכן

$$\sphericalangle EBD+\sphericalangle EDB=90^{\circ}-\frac{\sphericalangle ABD}{2}+90^{\circ}-\frac{\sphericalangle ADB}{2}=$$
$$=90^{\circ}+\frac{180^{\circ}-\sphericalangle ABD-\sphericalangle ADB}{2}=90^{\circ}+\frac{\sphericalangle BAD}{2}=90^{\circ}+60^{\circ}$$

לכן $\sphericalangle BED=180^{\circ}-\left(\sphericalangle EBD+\sphericalangle EDB\right)=30^{\circ}$.

ובכן, נקודה E נמצאת על חוצה זווית פנימי של $\sphericalangle BAD$ ובנוסף גם $\sphericalangle BED=30^{\circ}$. זה בדיוק ההגדרה של C. זה גם מגדיר את C ביחידות, כי כמה שמרחיקים נקודה לאורך חוצה הזווית של A הזווית $\sphericalangle BED$ הולכת וקטנה. לכן C זו E, כלומר נקודת מפגש של 3 חוצי זוויות של משולש BAD: חוצה זווית של זווית פנימית ב-A ושני חוצי זוויות חיצוניים מקודקודים האחרים.

כעת נשקף את A ביחס לישרים BC ו-DC, נקבל נקודות M ו-N בהתאמה. נקודות M ו-N נמצאות על המשך של הקטע BD, מכיוון ש-BC ו-DC הם חוצי זוויות חיצוניים של $\sphericalangle DBA$ ו- $\sphericalangle BDA$ בהתאמה. לכן $AB+BD+DA=MB+BD+DN=MN$, כלומר אפשר להחליף את היקף המשולש שמבקשים לחשב באורך הקטע MN.

מכיוון שהנקודות הוגדרו באמצעות שיקוף,

$$\sphericalangle MCN=\sphericalangle MCB+\sphericalangle BCA+\sphericalangle ACD+\sphericalangle DCN=$$
$$=\sphericalangle BCA+\sphericalangle BCA+\sphericalangle ACD+\sphericalangle ACD=$$
$$=2\left(\sphericalangle BCA+\sphericalangle ACD\right)=2\sphericalangle BCD=60^{\circ}$$

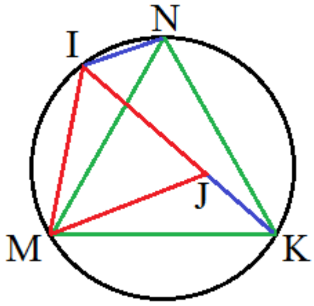
בנוסף גם $CM=CN=CA=2015$, היות והקטעים CM, CN הם שיקופים של CA ולכן המשולש CMN הוא משולש שווה-שוקיים עם זווית 60° בראשו כלומר משולש שווה צלעות, וצלעותיו שוות ל-2015. בפרט $MN=2015$ וזה שווה להיקף המשולש שביקשו לחשב.

פתרון שני. ננסח טענה שתעזור לנו לפתור את השאלה:

טענה. תהא I נקודה כלשהי על המעגל החוסם של המשולש MNK על הקשת MN.

מדינת ישראל
משרד החינוך

אז $IM+IN=IK$.



הוכחת הטענה. ניקח נקודה J על IK, כזאת ש- $IJ=IM$. הזוויות $\sphericalangle MIK$ נשענת על אותה קשת כמו הזווית $\sphericalangle MNK$ שהיא זווית של משולש משוכלל, לכן $\sphericalangle MIK=60^\circ$, כלומר $\sphericalangle MIJ=60^\circ$. לכן משולש MIJ הוא לא רק שווה-שוקיים, אלה שווה-צלעות.

לכן סיבוב ב- 60° סביב M שמעביר את K ל-N, יעביר גם את J ל-I. לכן באמצעות סיבוב ניתן להעביר את JK ל-IN. לכן $JK=IN$. לכן $IK=IJ+JK=IM+IN$.

בזה הוכחנו את הטענה, ולכן יש לנו זכות מלאה להשתמש בה. נבנה משולש משוכלל BED, כך ש-E ו-A נמצאים בצדדים שונים של BD. המרובע DABE חסום, מכיוון שבו $\sphericalangle E=60^\circ$ לפי הבנייה, ו- $\sphericalangle A=120^\circ$ לפי הנתון, ויחד זה נותן 180°. בנוסף הזוויות $\sphericalangle EAD$, $\sphericalangle EAB$ שוות, הרי הן נשענות על קשתות שוות. לכן הישר AE הוא חוצה את הזווית $\sphericalangle BAD$, ולכן הוא מתלכד אם הישר AC.

המעגל שמרכזו E שעובר דרך D ו- B עובר גם דרך C, מכיוון שהזווית המרכזית $\sphericalangle BED$ היא 60°, בזמן ש- $\sphericalangle BCD=30^\circ$ לפי הנתון. לכן EC שווה לרדיוס של מעגל זה שווה לכל צלע של המשולש המשוכלל BED, בפרט שווה גם ל-BD. אם נשתמש גם בטענה שהוכחנו עבור נקודה A ומשולש BAD, נקבל

$$AC=AE+EC=AB+AD+BD$$

כלומר ההיקף של משולש BAD שווה ל-AC, ששווה ל-2015 לפי הנתון.

8. $a,b,c\ge 0$ המקיימים $a^3+b^2+c\ge a^4+b^3+c^3$.

הוכיחו כי $a^3+b^3+2c^3\le 4$.

פתרון. ההוכחה תהיה מורכבת משימוש באי-שוויון הממוצעים מספר פעמים. כידוע, ממוצע חשבוני גדול או שווה לממוצע הנדסי.

בפרט, $\frac{a^4+a^4+a^4+1}{4}\ge\sqrt[4]{a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot 1}=a^3$, במילים אחרות

$$(*)\quad 3a^4+1\ge 4a^3$$

כמו כן, $b^2 = \sqrt[3]{b^3 \cdot b^3 \cdot 1} \le \frac{b^3+b^3+1}{3}$, כלומר

$$(**) \quad 2b^3+1 \ge 3b^2$$

באופן דומה, $c = \sqrt[3]{c^3 \cdot 1 \cdot 1} \le \frac{c^3+1+1}{3}$, כלומר

$$(***) \quad c^3+2 \ge 3c$$

כעת נכפיל את התנאי הנתון ב-3 ונקבל

$$3a^3+3b^2+3c \ge 3a^4+3b^3+3c^3$$

נחבר את אי-השוויון שמתקבל עם אי-השוויונים $(*)$, $(**)$ ו- $(***)$, ונקבל

$$\cancel{3a^4}+1+\underline{\underline{2b^3}}+1+\underline{\underline{\underline{c^3}}}+2+\underline{3a^3}+\cancel{3b^2}+\cancel{3c} \ge$$

$$\underline{4}a^3+\cancel{3b^2}+\cancel{3c}+\cancel{3a^4}+\underline{\underline{3}}b^3+\underline{\underline{\underline{3}}}c^3$$

$$4 \ge a^3+b^3+2c^3$$

מש"ל.